Algebra Lineal

Segundo Parcial - Primer Cuatrimestre 2007

Nombre y apellido	LU	Carrera	1	2	3	4	5	6

Problema 1: Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz tal que $\dim(\mathrm{Ker}A) = 3$, $\dim(\mathrm{Ker}A^{10}) = 28$, $\dim(\mathrm{Ker}A^{20}) = 40$ y $m_A(x) = x^{30}$. Calcular n y la forma de Jordan de A, A^2 y A^3.

Problema 2: Sea

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 6 \\ 10 & 11 & -15 \\ 5 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Descomponer $A = D + N$ con D diagonalizable, N nilpotente y $DN = ND$.

Problema 3: Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal dada por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_4, x_1, -2x_2 - x_3 - 4x_4, 4x_2 + x_3).$$

Descomponer a $\mathbb{R}^4 = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$ con $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ subespacios f-invariantes no nulos.

Problema 4: Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ nilpotente. Probar que $\dim(\mathbb{V}) \leqslant \mathrm{gr}(m_f)\, \dim(\mathrm{Ker} f)$.

Problema 5: Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno (de dimensión finita). Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$. Probar que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^* \circ f)$ y $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ f^*)$.

Problema 6: Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (cada uno está repetido tantas veces como su multiplicidad en el polinomio característico). Probar que

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2.$$

Probar que si A es normal ($A^*A = AA^*$) entonces vale la igualdad.