Clase práctica 6 (computabilidad)
Lógica y Computabilidad

Sergio Mera

Ejercicio 1.- Sea

$$h(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ \Phi_x(x)\downarrow\ \vee\ \Phi_y(y)\downarrow \\ \uparrow & sino \end{cases}$$

Decidir si $h(x,y)$ es parcialmente computable y demostrarlo.

Resolución

```
    Y ← 1
[A] Z1 ← STP(X1, X1, Z2)
    IF Z1 = 1 GOTO E
    Z1 ← STP(X2, X2, Z2)
    IF Z1 = 1 GOTO E
    Z2 ← Z2 + 1
    GOTO A
```

Ejercicio 2.-

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 & si\ \Phi_x(y) = z \\ 0 & sino \end{cases}$$

Decidir si $f(x,y,z)$ es computable y demostrarlo.

Resolución A primera vista, nos parece que no va a ser computable. Intentemos demostrarlo...

Dem: Supongamos que f es computable. Luego, la función $g(x)$ es computable.

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & si\ f(x,x,x) = 1 \\ x & sino \end{cases}$$

Como $g(x)$ es computable, existe un programa con número e talque $g(x) = \Phi_e(x)$
Consideremos los dos (únicos) posibles casos:

- $g(e) = e + 1$
- $g(e) = e$

Sup $g(e) = e + 1$, por definición,

$$g(e) = \Phi_e(e) = e + 1 \Leftrightarrow f(e, e, e) = 1 \Leftrightarrow \Phi_e(e) = e$$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{por\ ser\ total} \quad e = e + 1 \qquad \textit{Absurdo!}$

Notemos que no hace falta considerar el segundo caso, pues ya esta considerado en el caso anterior.

El absurdo provino de suponer f computable. Luego, f no es computable.

Ejercicio 3.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ Img(\Phi_x(y)) \neq \emptyset \\ 0 & sino \end{cases}$$

Decidir si $f(x, y, z)$ es computable y demostrarlo.

Resolución A primera vista, nos parece que no es computable. Intentemos demostrarlo...

Dem: Supongamos que f es computable.

Consideremos $g(x)$ definida como:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ \Phi_x(x) \downarrow \\ \uparrow & sino \end{cases}$$

Claramente $g(x)$ es computable (se puede hacer un programa para demostrarlo). Sea e su número de programa talque $g(x, y) = \Phi_e(x, y)$

Por el teorema del parámetro, $\exists$ S primitiva recursiva talque

$$\Phi^1_{S(e,x)}(y) = \Phi^2_e(x, y)$$

Reescribamos la definición de $\Phi^1_{S(e,x)}(y)$:

$$\Phi^1_{S(e,x)}(y) = \begin{cases} 1 & si\ \Phi_x(x) \downarrow \\ \uparrow & sino \end{cases}$$

Analicemos qué pasa con $\Phi_n(n)$, para un n fijo:

$-\Phi_n(n) \downarrow \Rightarrow \Phi_{S(e,x)}(y) \downarrow \forall y \Rightarrow Img(\Phi_{S(e,x)}(y)) \neq \emptyset \Rightarrow f(S(e, x)) = 1$

$-\Phi_n(n) \uparrow \Rightarrow \Phi_{S(e,x)}(y) \uparrow \forall y \Rightarrow Img(\Phi_{S(e,x)}(y)) = \emptyset \Rightarrow f(S(e, x)) = 0$

$$f(S(e, x)) = \begin{cases} 1 & si\ \Phi_x(x) \downarrow \\ 0 & si\ \Phi_x(x) \uparrow \end{cases}$$

$\Rightarrow f(S(e, x)) = HALT(x, x)$ Absurdo! (que provino de suponer f computable)

Ejercicio 4.- Se quiere encontrar una función computable $g(x, y)$ talque:

$$\Phi_x(\Phi_y(z)) = \Phi_{g(x,y)}(z)$$

Resolución Podemos hacer un programa P_0 que compute $\Phi_x(\Phi_y(z))$
P_0:

$Z_1 \leftarrow \Phi_{X_2}(X_3)$
$Y \leftarrow \Phi_{X_1}(Z_1)$

Generar este P_0 se hace con una función p.r. de parámetros x,y,z. Por lo tanto,

$$\Phi_x(\Phi_y(z)) = \Phi_{P_0}(x, y, z)$$

por el Teorema del Parámetro:

$$\Phi_{P_0}(x, y, z) = \Phi_{S(P_0,y,z)}(x)$$

Luego,

$$\Phi_x(\Phi_y(z)) = \Phi_{S(P_0,y,z)}(x) \Rightarrow g(x, y) = S(P_0, y, z)$$

Ejercicio 5.- Sea

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 & si\ \Phi_x(y) = z \\ 0 & sino \end{cases}$$

Demostrar que $f(x, y, z)$ no es computable usando el teorema de la recursión.

Dem: Supongamos que f es computable. Luego, la función

$$g(x, y) = \begin{cases} x + 1 & si\ f(x, x, x) = 1 \\ x & sino \end{cases}$$

es computable.

Como $g(x)$ es computable, por el Teorema de la recursión existe un programa con número e talque

$$g(e, y) = \Phi_e(y) = \begin{cases} e + 1 & si\ f(e, e, e) = 1 \\ e & sino \end{cases}$$

Consideremos los dos (únicos) posibles casos:

- $\Phi_e(e) = e + 1 \Rightarrow f(e, e, e) = 1 \Rightarrow \Phi_e(e) = e$
- $\Phi_e(e) = e \Rightarrow f(e, e, e) \neq 1 \Rightarrow f(e, e, e) = 0 \Rightarrow \Phi_e(e) \neq e$

Absurdo! que provino de suponer f computable.