

Segundo Parcial

07/12/07

Sólo se pueden utilizar las macros y funciones primitivas recursivas definidas en el libro. En caso de duda, consulte.

1. Sea $sq2(n)$ la función que calcula el número formado por las primeras $n + 1$ cifras de $\sqrt{2}$ (ignorando la coma decimal).

Por ejemplo $sq2(0) = 1, sq2(1) = 14, sq2(2) = 141, sq2(3) = 1414$.

- a) Decidir si la función $sq2$ es computable y demostrarlo.
 - b) Decidir si la función $sq2$ es primitiva recursiva y demostrarlo.
2. Decimos que un programa $P(x)$ en S con un solo parámetro x es *s-cuadrático* si existe una constante k tal que para todo valor de x el programa termina en a lo sumo $k(x^2 + 1)$ pasos.

- a) Probar que no hay ningún programa S-cuadrático que calcule la función $f(x) = x^3$

- b) Se tiene un programa S-cuadrático $P(x)$ con constante k_P que calcula la función $f_P(x)$ y un programa S-cuadrático $Q(x)$ con constante k_Q que calcula la función $f_Q(x)$.

Probar que la función $h(x) = f_P(f_Q(x))$ es primitiva recursiva.

3. Decimos que una función parcial es *prima* si para todos los x en el dominio de f se tiene que $f(x)$ es un número primo. Definimos el conjunto

$$A = \{y / \Phi_y \text{ es una función prima}\}.$$

Analizar si A y \bar{A} son recursivamente enumerables. Justificar.

4. Definimos la función

$$\sqrt{x} = \begin{cases} y & \text{si } x = y^2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

Decidir si $Halt(x, \sqrt{x})$ es parcialmente computable y demostrarlo.

Nota: En $Halt(x, y)$ el parámetro y indica el número de programa y x indica el valor de la entrada.

5. Dados dos conjuntos de números naturales, A y B definimos el conjunto $A + B$ como

$$A + B = \{a + b/a \in A, b \in B\}.$$

Por ejemplo si $A = \{1, 2, 4\}$ y $B = \{0, 1, 3, 6\}$ entonces $A+B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10\}$.

- a) Probar que si A es recursivamente enumerable y B es recursivamente enumerable entonces $A + B$ es recursivamente enumerable.

- b) Encontrar dos conjuntos no computables A y B tales que $A + B$ si sea computable.