ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS III
Final / 04-MAR-2021

1. [2.5 puntos] Una grilla de $n \times m$, con $n, m \geq 1$ es un grafo isomorfo a $G = (V, X)$ donde $V = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ y $X = \{((i,j),(i,j+1))/i \in \{1 \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m-1\}\} \cup \{((i,j),(i+1,j))/i \in \{1, \ldots, n-1\}, j \in \{1, \ldots, m\}\}$

   (a) Decir cuántos caminos de longitud mínima hay del nodo $(1,1)$ al nodo $(3,4)$ en una grilla de 3×4.

   (b) Dar una fórmula recursiva para la cantidad de caminos de longitud mínima, $f(n,m)$, desde $(1,1)$ hasta (n,m) en una grilla de $n \times m$.

   (c) Escribir un algoritmo de programación dinámica para calcular $f(n,m)$.

   (d) Probar su correctitud y calcular su complejidad.

2. [2.5 puntos] Sea $D = (V, X)$ un digrafo donde cada arista $e \in X$ tiene un tiempo de viaje $c(e) > 0$ y un tiempo de cierre $t(e) \geq 0$. Cada arista $v \to w$ representa un camino directo de v a w. El tiempo de viaje $c(v \to w)$ indica que si un vehículo recorre $v \to w$ partiendo desde v en el instante t, entonces llega al vértice w en el momento $t + c(v \to w)$. Por otra parte, el tiempo de cierre $t(v \to w)$ indica que el vehículo puede recorrer $v \to w$ sólo si parte de v antes del instante $t(v \to w)$. Dado un vértice v, queremos determinar el máximo instante $t \geq 0$ en que un vehículo puede partir de cada $w \in V$ para llegar a v, respetando todos los tiempos de cierre de las aristas. Diseñar un algoritmo eficiente para resolver este problema y justificar la corrección de la solución. **Sugerencia: pensar en un algoritmo goloso tipo Dijkstra y expresar su invariante para justificar la solución.**

3. [2.5 puntos] Considerar el flujo máximo de una red dada entre los nodos s y t. Para cada una de las siguientes sentencias explicar por qué es verdadera o dar un contraejemplo.

   (a) Si la capacidad de todo arco es par, entonces el valor del flujo máximo debe ser par.

   (b) Si la capacidad de todo arco es par, entonces existe un flujo máximo en el cual el flujo sobre cada arco es par.

   (c) Si la capacidad de cada arco es impar, entonces el valor del flujo máximo debe ser impar.

   (d) Si la capacidad de todo arco es impar, entonces existe un flujo máximo en el cual el flujo sobre cada arco es impar.

4. [2.5 puntos] Considerar los siguientes dos problemas de decisión:

   - Dado un grafo $G = (V, E)$ con pesos positivos en sus aristas, un entero positivo k y dos nodos distinguidos $s, t \in V$, ¿hay un camino simple entre s y t de longitud al menos k?
   - Dado un grafo $G = (V, E)$ con pesos positivos en sus aristas, un entero positivo k y dos nodos distinguidos $s, t \in V$, ¿hay un camino simple entre s y t de longitud a lo sumo k?

   ¿A qué clase de complejidad pertenece cada uno de estos problemas? Justificar la respuesta (describiendo un algoritmo polinomial para el caso de que el problema esté en P, y demostrándolo para el caso que el problema esté en NP-completo).