UBA – Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Departamento de Computación

Algoritmos y Estructura de Datos I

Primer cuatrimestre de 2011

Práctica 1– Lógica proposicional y tipos básicos

1. Sintaxis

Ejercicio 1 Sean $x : \mathbb{Z}$, $y : \mathbb{R}$ y $z : \mathsf{Bool}$ tres variables. ¿Cuál es el tipo de las siguientes expresiones?

a) $3 + 7$
b) True
c) $y \cdot y$
d) $(z \vee \neg z)$
e) $x == 6$
f) $x == y$
g) $\pi == 3$
h) $x + y \cdot 2$
i) $z \wedge (0 == 1)$
j) $\pi + x$

¿Podría asignarse más de un tipo a alguna de ellas?

Ejercicio 2 Sean $x : \mathbb{Z}$, $y : \mathbb{R}$ y $z : \mathsf{Bool}$ tres variables. ¿Cuáles de las siguientes expresiones pueden tiparse correctamente?

a) $\pi + 1$
b) $z + x$
c) $(1 == 0) \vee (x == z)$
d) $(x + 10) == y$
e) $\pi + x$
f) $(x \vee y)$
g) $\pi == 3$
h) $z == (y == x)$
i) $z == (\pi == x)$
j) $y \cdot y < 0$

Ejercicio 3 La expresión $(3 + 7 == \pi - 8) \wedge \text{True}$ tiene tipo Bool. Justifique informal, pero detalladamente, el porqué.

2. Semántica proposicional clásica

Ejercicio 4 Sean p y q variables proposicionales. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son *fórmulas bien formadas*?

a) $(p\neg q)$
b) $p \vee q \wedge \text{True}$
c) $(p \to \neg p \to q)$
d) $\neg(p)$
e) $(p \vee \neg p \wedge q)$
f) $(\text{True} \wedge \text{True} \wedge \text{True} \wedge \ldots$
g) $(\neg p)$
h) $(p \vee \text{False})$
i) $(p == q)$

Ejercicio 5 Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones

a) $(\neg a \vee b)$
b) $(c \vee (y \wedge x) \vee b)$
c) $\neg(c \vee y)$
d) $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$
e) $((c \vee y) \wedge (x \vee b))$
f) $(((c \vee y) \wedge (x \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge x) \vee b))$
g) $(\neg c \wedge \neg y)$

cuando el valor de verdad de a, b y c es *verdadero*, mientras que el de x e y es *falso*.

Ejercicio 6 Determinar, utilizando tablas de verdad, si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.

a) $(p \vee \neg p)$
b) $(p \wedge \neg p)$
c) $((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \to q))$
d) $((p \vee q) \to p)$
e) $(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$
f) $(p \to p)$
g) $((p \wedge q) \to p)$
h) $\big((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))\big)$
i) $\big(((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))\big)$

Ejercicio 7 Dadas las proposiciones lógicas α y β, se dice que α es más fuerte que β si y sólo si $\alpha \to \beta$ es una tautología. En este caso, también decimos que β es más débil que α. Determinar la relación de fuerza de los siguientes pares de fórmulas:

a) True, False
b) $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$
c) True, True
d) p, $(p \wedge q)$
e) False, False
f) p, $(p \vee q)$
g) p, q
h) p, $(p \to q)$

¿Cuál es la proposición más fuerte y cuál la más débil de las que aparecen en este ejercicio?

Ejercicio 8 Decimos que un conectivo es *expresable* mediante otros si es posible escribir una fórmula utilizando exclusivamente estos últimos y que tenga la misma tabla de verdad que el primero (es decir, son equivalentes). Por ejemplo, la disyunción es expresable mediante la conjunción más la negación, ya que $(p \vee q)$ tiene la misma tabla de verdad que $\neg(\neg p \wedge \neg q)$.

Mostrar que cualquier fórmula de la lógica proposicional que utilice los conectivos $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\rightarrow$ (implicación), $\leftrightarrow$ (equivalencia) puede reescribirse utilizando sólo los conectivos $\neg$ y $\vee$.

Ejercicio 9 Sean las variables proposicionales f, e y p con los siguientes significados:

$$f \equiv \text{“es fin de semana”} \qquad e \equiv \text{“Juan estudia”} \qquad m \equiv \text{“Juan escucha música”}$$

a) Escribir usando lógica proposicional las siguientes oraciones:
   - “Si es fin de semana, Juan estudia o escucha música, pero no ambas cosas”
   - “Si no es fin de semana entonces Juan no estudia”
   - “Cuando Juan estudia los fines de semana, lo hace escuchando música”

b) Asumiendo que valen las tres proposiciones anteriores ¿se puede deducir que Juan no estudia? Justificar usando argumentos de la lógica proposicional.

Ejercicio 10 En la salita verde de un jardín se sabe que las siguientes circunstancias son ciertas:

a) Si todos conocen a Juan entonces todos conocen a Camila (podemos pensar que esto se debe a que siempre caminan juntos).

b) Si todos conocen a Juan, entonces que todos conozcan a Camila implica que todos conocen a Gonzalo.

La pregunta entonces es: ¿Es cierto que si todos conocen a Juan entonces todos conocen a Gonzalo? Justificar.

Ejercicio 11 Siempre que Haroldo se pelea con sus compañeritos, vuelve a casa con un ojo morado. Si un día lo viéramos llegar con el ojo destrozado, podríamos sentirnos inclinados a concluir que se ha tomado a golpes de puño y cabezazos con los otros niñitos. ¿Puede identificar el error en el razonamiento anterior? *Pista:* Es conocido como *falacia de afirmar el consecuente.*

3. Semántica de cortocircuito

Ejercicio 12 Asignar un *valor de verdad* (*verdadero*, *falso* o *indefinido*) a cada una de las siguientes *expresiones aritméticas* en los reales.

a) $5 > 0$

b) $1 \leq 1$

c) $(5+3-8)^{-1} \neq 2$

d) $0 \geq 5$

e) $\frac{1}{0} == \frac{1}{0}$

f) $0 > \log_2(2^{2^0-1} - 1)$

g) $0 \cdot \sqrt{-1} == 0$

h) $\sqrt{-1} \cdot 0 == 0$

i) $\tan(\frac{\pi}{2}) == \tan(\pi) - \tan(2)$

Ejercicio 13 La semántica de cortocircuito se basa en una forma particular de evaluar las expresiones booleanas. ¿Puede identificarla? ¿Cuál es su motivación?

Ejercicio 14 Determinar los valores de verdad de las proposiciones del ejercicio 5 cuando el valor de verdad de b y c es *verdadero*, el de x es *falso* y el de a e y es *indefinido*

Ejercicio 15 Construir las tablas de verdad de las fórmulas del ejercicio 6, teniendo en cuenta los tres valores de verdad (verdadero, falso e indefinido).

Ejercicio 16 A diferencia de lo que sucede en la lógica proposicional clásica, en general no vale que $(p \wedge q)$ es equivalente a $(q \wedge p)$ cuando admitimos a $\perp$ como valor de verdad. Mostrar que sin embargo $(p \leftrightarrow q)$, $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ y $((q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q))$ siguen siendo equivalentes.

Ejercicio 17 Sean p, q y r tres variables de las que se sabe que:

- p y q nunca están indefinidas,
- r se indefine sii q es *verdadera*

Proponer una fórmula que nunca se indefina, utilizando siempre las tres variables y que sea verdadera si se cumple que:

a) Al menos una es verdadera

b) Ninguna es verdadera

c) Exactamente una de las tres es verdadera

d) Sólo p y q son verdaderas

e) No todas al mismo tiempo son verdaderas

f) r es verdadera