Recuperatorio de Lógica

Lógica y Computabilidad

15 marzo 2007

Este examen se aprueba obteniendo al menos **60 puntos**. El parcial es a libro abierto y se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras. En el caso de usar resultados de las guías de ejercicios, se deben incluir las demostraciones.

Ejercicio 1. (**25 p**) Una función f se dice *circular* cuando para todo elemento e en el dominio de f existe un natural $n > 0$ tal que $f^n(e) = e$, en donde f^n representa el resultado de aplicar n veces la función f en forma sucesiva. Mostrar que no es expresable en primer orden la proposición "f es una función circular".

Ejercicio 2. (**35 p**) Sea un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de predicado binario P y un símbolo de constante r. Sea la clase de modelos $\mathscr{C} = \{\mathcal{M} \mid P^{\mathcal{M}}$ define un árbol con raíz r sobre todos los elementos de $\mathcal{M}\}$, donde por árbol se entiende cualquier árbol dirigido donde cada nodo puede tener una cantidad arbitraria de hijos ($P(x,y)^{\mathcal{M}}$ afirma que $x^{\mathcal{M}}$ es el padre de $y^{\mathcal{M}}$). Considerar la axiomatización SQ_{Tree}, que extiende a la axiomatización SQ vista en clase de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rl}
\textbf{SQ8} & (\forall x)\big(\neg P(x,r) \wedge \neg P(x,x)\big) \\
\textbf{SQ9} & (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((P(y,x) \wedge P(z,x)) \rightarrow (y = z)\big) \\
\textbf{SQ10} & (\forall x)\big(((\forall y)\neg P(y,x)) \rightarrow x = r\big)
\end{array}$$

Sabiendo que SQ es correcta y completa con respecto a la clase de todos los modelos:

a. (**10 p**) Demostrar que los axiomas $SQ8, SQ9$ y $SQ10$ son válidos en $\mathscr{C}$.

b. (**25 p**) Sea $\varphi = (\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x)\big)$. Demostrar que existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que todos los axiomas de SQ_{Tree} son válidos en $\mathcal{M}$, pero $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

Ejercicio 3. (**20 p**) Vamos a extender al lenguaje de la lógica proposicional con los símbolos $\top$ (que siempre evalúa verdadero) y $\bot$ (que siempre evalúa falso). Para cada fórmula φ y símbolo de proposición p, definimos la fórmula $\varphi^p_\top$ como el resultado de reemplazar todas las apariciones de p en φ por $\top$. De la misma manera se define $\varphi^p_\bot$. Sea $\varphi^p_\star = (\varphi^p_\top \vee \varphi^p_\bot)$. Dado un símbolo proposicional p fijo, demostrar lo siguiente:

a. (**5 p**) $\{\varphi\} \models \varphi^p_\star$.

b. (**15 p**) Si $\{\varphi\} \models \psi$ y p no aparece en ψ, entonces $\{\varphi^p_\star\} \models \psi$.

Ejercicio 4. (**20 p**) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden sin igualdad con un símbolo de predicado unario P y los operadores lógicos $\{\wedge, (\exists x)\}$. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ en donde se agrega el operador lógico $\neg$. Decimos que $\mathcal{L}$ es *adecuado* con respecto a $\mathcal{L}'$ cuando para toda $\varphi \in Form(\mathcal{L}')$ existe una fórmula $\psi \in Form(\mathcal{L})$ tal que para todo modelo $\mathcal{M}$ y valuación v, $\mathcal{M} \models \varphi[v]$ sii $\mathcal{M} \models \psi[v]$. Mostrar que $\mathcal{L}$ no es adecuado con respecto a $\mathcal{L}'$.