3) a)

Si el sistema converge, va a converger a la solución de

$$x = x - \omega V\Sigma\left(U^t b - \Sigma V^t x\right)$$

$$x = x - \omega\left(V\Sigma U^t b - V\Sigma^2 V^t x\right)$$

Como $A = U\Sigma V^t$,

$$A^t A = \left(U\Sigma V^t\right)^t \left(U\Sigma V^t\right) = V\Sigma \underbrace{U^t U}_{I} \Sigma V^t = V\Sigma^2 U^t$$

y $A^t = \left(U\Sigma V^t\right)^t = V\Sigma U^t$

Entonces el sistema es

$$x = x - \omega\left(A^t b - A^t A x\right)$$

$$0 = -\omega A^t \left(b - Ax\right)$$

$\omega \neq 0, A$ inversible por tener autovalores > 0

$$A^{-t} 0 = \left(b - Ax\right)$$

$$0 = b - Ax$$

$$Ax = b$$

El sistema resuelve $Ax = b$.

b)

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega\left(A^t b - A^t A x^{(k)}\right) \text{ (ítem anterior)}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega A^t A x^{(k)} - \omega A^t b$$

$$x^{(k+1)} = \left(I + \omega A^t A\right) x^{(k)} - \omega A^t b$$

La iteración es de la forma

$$x^{(k+1)} = T x^{(k)} + c$$

Con

$$T = I + \omega A^t A$$

c)

A ortogonal => $A^t A = A^{-1} A = I$

$$I + \omega A^t A = I + \omega I$$

El esquema converge sii $\rho\left(I + \omega I\right) < 1$

$$\left(I + \omega I\right) v = v + \omega v = \left(1 + \omega\right) v \forall v \in \mathbf{R}^n$$

Luego, el único autovalor de $I + \omega I$ es $\left(1 + \omega\right)$.

$$\rho\left(I + \omega I\right) = \left|1 - \omega\right|$$

$$\left|1 - \omega\right| < 1 \Leftrightarrow -2 < \omega < 0$$