Exámenes Finales

Álgebra Lineal

Matemática - Computación

Escrito y editado por: Gabriel R. (Estudiante de Lic. en Ciencias Matemáticas – FCEN UBA)

Website: WWW.FDXMATHS.COM   Facebook: WWW.FACEBOOK.COM/FDXMATHS

Introducción

En este documento te ofrezco algunos **finales** tomados en cuatrimestres anteriores en la materia de: **Álgebra Lineal**, para las carreras de: Matemática y Computación. Esta materia se dicta en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

También te muestro los temas que entran para el final y la bibliografía recomendada por los docentes. Si buscás más info de la materia como fechas de exámenes, cursos y turnos disponibles, guías de ejercicios, etc. visitá la página oficial desde: http://cms.dm.uba.ar/academico/materias/

Podés encontrar más parciales en la fotocopiadora del Pabellón I (de ahí los saqué).

Programa de la materia

http://cms.dm.uba.ar/academico/programas/algebra_lineal

Repaso 1:
(se supone conocido) Kn. Dependencia lineal. Sistemas de ecuaciones lineales. Notación Matricial. Método de eliminación de Gauss. Dependencia lineal de filas y columnas. Resultados básicos: Sistemas homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene solución no trivial.
Capítulo I:
a) Determinantes de 2x2 y 3x3. Permutaciones. El Grupo Simétrico (Ciclos, Ciclos Disjuntos, Transposiciones. Paridad) Determinante de orden n. Propiedades fundamentales. Teorema: Determinante es la única forma multilineal alternada (salvo constante). Determinantes como volumen. Cálculo determinantes, menores, cofactores. Teorema de Laplace, desarrollo por filas y columnas.
b) Matrices, suma, producto. Anillo de Matrices. Determinante del producto. Matriz adjunta. Matriz inversa. Regla de Cramer. Operaciones Elementales de filas y columnas. Matrices elementales. El Grupo General lineal. Equivalencia de matrices. Rango por determinantes (invariante para la equivalencia).
Capítulo II:
a) Espacios Vectoriales Abstractos. Dependencia lineal. Generadores. Cardinalidad de Conjuntos Linealmente Independientes $\leq$ Cardinalidad de Conjuntos de Generadores. Bases. Existencia de Base en dimensión finita. Coordenadas Isomorfismo con K^n. Subespacios, Subespacios transladados (variedades lineales). Intersección, Suma. Teorema de la Dimensión Suma Directa. Formas Lineales. Dual. Base dual. Anuladores.
b) Transformaciones Lineales u Operadores. Suma, composición. Matriz asociada (con respecto a una base). Matriz de la composición, isomorfismo con el anillo de matrices. Matriz de Cambio de Base y Cambio de Coordenadas. Efecto de un cambio de coordenadas en la matriz del Operador. Semejanza de matrices. Núcleo, Imagen, Teorema de la Dimensión. Valores y vectores propios, Polinomios Característico. Subespacios de vectores propios. Diagonalización si y sólo si existe base formada por vectores propios.
Capítulo III:
Formas Bilineales. Matriz asociada (con respecto a una base). Notación Matricial. Efecto de un cambio de coordenadas en la matriz de una forma bilineal. Congruencia de matrices. Formas Bilineales Simétricas. Formas Cuadráticas. Fórmula Polar. Diagonalización con respecto a la congruencia (operaciones elementales simultáneas en filas y columnas). Caso específico del Cuerpo Real: Ley de Inercia de Sylvester. Signatura (invariante para la congruencia). Formas definidas positivas. Caracterización (si y sólo si todos los menores principales son positivos). Caso específico del Cuerpo Complejo: Formas Hermitianas, resultados correspondientes.
Capítulo IV:
a) Producto escalar en R^2, R^3, ángulo, coseno, proyección de un vector sobre otro, ortogonalidad, etc. Distancia entre variedades lineales (rectas y planos). Productos escalar en espacios abstractos. Caso real y caso complejo. (espacios euclideos y espacios unitarios). Cauchy-Schwartz. Angulo, Distancia, Norma, Ortogonalidad. Gram-Schmidt, Bases ortonormales, (fórmula para las coordenadas).
b) Isomorfismo con el Dual. Transformación adjunta. Trasformaciones y Matrices Ortogonales. Rotación en R^2, R^3, R^n. Existencia del eje de rotación. Estructura de una transformación Ortogonal. Transformaciones y Matrices Simétricas. Diagonzalización por medio de una transformación ortogonal (reducción de una forma cuadrática a sus ejes principales). Clasificación de Cuádricas con Centro. Relación con la signatura. Clasificación por signatura.
c) Descomposición polar. Caso Real. Raíz Cuadrada. Descomposición de una transformación Arbitraria en una Simétrica y una Ortogonal.
Repaso II:
(se supone conocido) Polinomios. Algoritmo de División, “Todo ideal es principal”. Máxima Común Divisor. Algoritmo de Euclides. Polinomios Coprimos. Descomposición en producto de factores irreducibles. Raíces, Enunciado del Teorema Fundamental del Algebra. Descomposición de Factores Lineales.
Capítulo VI:
Estructura de una Transformación Lineal, Estudio de la Semejanza de Matrices. Operadores Nilpotentes. Base y Forma Canónica de Jordan de Operadores Nilpotentes. Evaluación de un polinomio en un Operador y en una matriz. Polinomio Minimal. Subespacios Invariantes. Forma Triangular. Factorización del Polinomio Característico en Factores Coprimos y la correspondiente Descomposición del espacio en Suma Directa de Subespacios Invariantes. Subespacios Principales asociado a los valores propios. Descomposición Primaria. Teorema de Cayley-Hamilton. Base y Forma de Jordan.

Régimen de Aprobación

Se deben aprobar los dos exámenes parciales. Para los alumnos que desaprueben alguno o ambos exámenes, habrá dos fechas de recuperación al finalizar el cuatrimestre. Se podrá rendir un solo parcial por fecha de recuperatorio, pudiendo los alumnos elegir cuál examen recuperar en cada fecha.

Bibliografía

La **bibliografía oficial** recomendada para la materia es:

- Notas de Álgebra Lineal, por Jerónimo G., Sabia J. y Tesauri S. - PDF
- V. Voieydine, Álgebra Lineal, Editorial MIR
- A. Kurosh, Curso de Álgebra Superior, Editorial MIR
- S. Lipschutz, Álgebra Lineal, Serie Schaum

Correlatividades

Según el régimen de correlatividades vigente desde 2008 para cursar la materia es necesario haber aprobado los trabajos prácticos de "Álgebra I".

Final de Álgebra Lineal

1. Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación k-lineal. Probar que si $\dim \mathbb{V} < \infty$ entonces

$$\dim \mathbb{V} = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T.$$

2. Sean $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial de dimensión finita, $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación k-lineal nilpotente. Probar que existe una base B de $\mathbb{V}$ tal que $[T]_B$ está en forma de Jordan.

3. Sean $(\mathbb{V}, <,>)$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ lineal normal, B base ortonormal de $\mathbb{V}$ y $M = [T]_B$. Probar que si M es triangular superior entonces es diagonal.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal ortogonal para el producto interno canónico. Probar que existen una base ortonormal B, $\epsilon \in \{1, -1\}$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ tales que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

5. Sean $M, N \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tales que $Tr(M) = Tr(N)$ y $det(M) = det(N)$. Probar que si $MN \neq NM$ entonces M y N son semejantes. Dar un ejemplo de dos matrices M y N de 2×2 que conmuten, tengan la misma traza y el mismo determinante, pero que no sean semejantes.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

ALGEBRA LINEAL - PREFINAL

Ejercicio 1:

Hallar todos los valores $a, b \in \mathbb{C}$ tales que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 \\ -1-a+b & b & -1 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no sea diagonalizable. Para tales valores de a y b, hallar $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ inversible tal que PAP^{-1} esté en forma de Jordan.

Ejercicio 2:

Sea $f : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ una transformación lineal que verifica las siguientes condiciones:

- $\dim \mathrm{Nu}(f) = 1$
- 1 es autovalor de f
- $\mathrm{tr}(f) = -3$
- f^3 es diagonalizable pero f^2 no.

Encontrar todas las posibles formas de Jordan de f.

Ejercicio 3:

Sea $S = \{p \in \mathbb{R}^3[X] \ / \ p(1) = p(-1) = 0\} \subset \mathbb{R}^3[X]$. Encontrar, si es posible una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X]$ tal que:

- $f(S) \cap < X, X^3 > = < X - 3X^3 >$
- $f^t(S^\circ) = \langle \epsilon_0 + \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle$ (donde $\epsilon_\alpha(p) = p(\alpha)$).

Ejercicio 4:

Sean V un k-espacio vectorial de dimension n, $T : V \to V$ lineal con n autovalores distintos. Probar que si $U : V \to V$ es lineal y $UT = TU$ entonces U es diagonalizable.

Ejercicio 5:

Sean

$$\pi_1 = \begin{cases} x + 2y & = 0 \\ 3y + w & = 0 \end{cases} \quad , \quad \pi_2 = \langle (1,2,0,-2), (2,0,0,1) \rangle$$

Hallar $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ unitaria para el producto interno usual y tal que $T(\pi_1) \cap \pi_2 = \langle (3,2,0,-1) \rangle$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

ALGEBRA LINEAL - Examen Final - 4/4/2003

Ejercicio 1. Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times r}$. Probar que

$$\min\{\text{rg}(A), \text{rg}(B)\} \geq \text{rg}(AB) \geq \text{rg}(A) + \text{rg}(B) - n.$$

Ejercicio 2. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sean S y T subespacios de V.

i) Probar que $\dim V = \dim S + \dim S^\circ$.

ii) Probar que $(S \cap T)^\circ = S^\circ + T^\circ$.

Ejercicio 3. Sea $f : K^n \to K^n$ una transformación lineal tal que $\mathcal{X}_f = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ y, para cada $1 \leq i \leq r$, sea E_{λ_i} el subespacio de autovectores de autovalor λ_i. Probar que f es diagonalizable si y sólo si $\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$ $(1 \leq i \leq r)$.

Ejercicio 4. Sea $(V, <,>)$ un espacio con producto interno de dimensión n y sea $f : V \to V$ una transformación lineal nilpotente tal que $f \circ f^* = f^* \circ f$. Probar que $f = 0$. (Sugerencia: probar primero que $f \circ f^* = 0$).

Ejercicio 5. Decidir si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones. Justificar.

i) $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tal que $m_A = \mathcal{X}_A$. Entonces si λ es autovalor de A, dim $E_\lambda = 1$.

ii) Sean A y B matrices en $\mathbb{C}^{5\times 5}$ tales que $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = (X-2)^r.(X-3)^s$, con r y s no nulos. Si $m_A = m_B$ y dim (Nu $(A - 2.I)$) = dim (Nu $(B - 2.I)$), entonces A y B son semejantes.

iii) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $m_A = X^n$. Entonces no existe $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $B^2 = A$.$(n \geq 2)$

iv) Sean A, $B \in K^{n\times n}$. Si A es nilpotente, B es diagonalizable y λ es un autovalor de B, λ es un autovalor de $A + B$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

ALGEBRA LINEAL - Examen Final - 14/5/03

Ejercicio 1. Sea $A \in K^{n\times n}$.

i) Probar que $A.\ \mathrm{adj}(A) = \det A.I_n$.

ii) Calcular $\mathrm{rg}(\mathrm{adj}(A))$ en función del $\mathrm{rg}(A)$.

Ejercicio 2. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que su polinomio minimal es $m_f = p.q$ con p y q coprimos. Probar que existen subespacios S y T de V invariantes para f tal que $m_{f|_S} = p$, $m_{f|_T} = q$ y $S \oplus T = V$.

Ejercicio 3. Sea $A \in GL(3, \mathbb{C})$. Probar que existe $B \in GL(3, \mathbb{C})$ tal que $B^2 = A$.

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que $\mathrm{rg}(A)$ es la multiplicidad del 0 como raíz del polinomio característico de la matriz A^*A. (Sugerencia: probar que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*A)$.)

Ejercicio 5. Decidir si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones. Justificar.

i) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matriz tal que si se cambia cualquier columna de A por cualquier vector de la base canónica y se calcula el determinante, resulta siempre distinto de cero. Entonces A es inversible.

ii) Sea $A \in K^{n\times n}$ inversible y sea S el subespacio de $K^{n\times n}$, $S = < A, A^2, \dots, A^r, \dots >$. Entonces $Id \in S$.

iii) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ una transformación lineal. Entonces existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $m_v = m_f$.

iv) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ inversible tal que A^2 es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$. Entonces A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

v) Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sean $f, g : V \to V$ dos proyecciones ortogonales tales que $f \circ g = g \circ f$. Entonces $f \circ g$ es una proyección ortogonal.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

FINAL ALGEBRA LINEAL VERANO 2004

Este examen esta dirigido a los alumnos del curso de verano 2004, y para poder rendir es necesario tener aprobados los trabajos practicos de ese curso, o poder acreditar con el profesor o los ayudantes haber asistido a las teoricas y/o a las practicas. Se aclara que tambien se toma otro examen para los alumnos libres o con T.P.'s firmados en todo otro cuatrimestre.

El examen consiste en desarrollar tres de los temas listados abajo, y un ejercicio de tipo teorico.

(1) Demostrar:
  a) Toda permutacion se descompone como producto de ciclos disjuntos.
  b) Todo ciclo se descompone como producto de transposiciones.

(2) Definir el polinomio de Vandermonde (no el determinante de Vandermonde).
  a) Demostrar que es antisimetrico.
  b) Utilizar a) para demostrar la invarianza de la paridad en el numero de transposiciones en que se descompone una permutacion.

(3) Escribir la formula de definicion del determinante y la definicion de forma multilineal alternada. Demostrar:
  a) Si φ es una forma multilineal alternada, entonces $\varphi(A) = det(A)\varphi(I)$, donde I es la matriz identidad.
  b) Utilizar a) para demostrar la formula $det(AB) = det(A)det(B)$.

(4) Sean $\{h_1, h_2, \ldots h_n\}$ y $\{v_1, v_2, \ldots v_k\}$ dos conjuntos finitos de vectores en un espacio vectorial. Demostrar: Si $h_1, h_2, \ldots h_n$ son $l.i.$ y $S(h_1, h_2, \ldots h_n) \subset S(v_1, v_2, \ldots v_k)$, entonces $n \leq k$. Argumentar como de este hecho se deduce que dos bases finitas cualesquiera tienen el mismo numero de elementos.

(5) Sean H y W dos subespacios de un espacio vectorial. Demostrar la formula: $dim(W + H) + dim(W \cap H) = dim(W) + dim(H)$.

(6) Sea V un espacio vectorial de dimension n, $\varphi : V \to V$ una transformacion lineal, E una base de V, y $A = [\varphi]_E$ la matriz de φ en la base E. Explicar (sin demostrar) cual es la relacion entre el rango de A y la imagen de φ, y la relacion entre el rango de A y la dimension del espacio de soluciones del sistema $AX = 0$. En base a ello demostrar $dimImagen(\varphi) + dimNucleo(\varphi) = n$.

(7) Sea V un espacio vectorial de dimension n, y $\varphi : V \to V$ una transformacion lineal. Demostrar directamente (sin usar matrices) la formula $dimImagen(\varphi) + dimNucleo(\varphi) = n$.

ALGEBRA LINEAL - Examen Final - 17/8/04

Ejercicio 1. Sea K un cuerpo y sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que el rango fila de A coincide con el rango columna de A.

Ejercicio 2. Enunciar y demostrar el Teorema de Hamilton-Cayley.

Ejercicio 3. Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que son equivalentes:

i) Para toda base ortonormal B de V, $f(B)$ es una base ortonormal de V.

ii) $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle \ \forall\, v, w \in V$.

iii) $f^* \circ f = f \circ f^* = id_V$.

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ y sea m_A su polinomio minimal.

i) Probar que gr $(m_A) \leq$ rg $(A) + 1$.

ii) Probar que, si rg $(A) = 1$, entonces m_A divide al polinomio $X^2 -$ tr$(A).X$.

Ejercicio 5. Decidir si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones. Justificar.

i) Sean $A, B \in K^{n\times n}$ tales que $A.\ \mathrm{adj}(B) = \lambda I_n$ con $\lambda \neq 0$. Entonces $\{A, B\}$ es un conjunto linealmente dependiente en $K^{n\times n}$.

ii) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ inversible tal que A^2 es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$. Entonces A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

iii) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Entonces existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica tal que $B^3 = A$.

iv) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $m_A = X^n$. Entonces no existe $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $B^2 = A$.

v) Sean M_1 y M_2 dos variedades lineales alabeadas en $\mathbb{R}^n$. Entonces $\dim M_1 + \dim M_2 \leq n - 1$.

Los ejercicios 1, 2 y 3 requieren una demostración teórica completa.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

ALGEBRA LINEAL - Examen Final - 9/9/04

Ejercicio 1. Sean A y B matrices en $K^{n\times n}$. Probar que $\det(A.B) = \det A. \det B$.

Ejercicio 2. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ todos los autovalores de A en K, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Para cada λ_i sea $E_{\lambda_i} = \{x \in K^n \ /A.x = \lambda_i x\}$.

Probar que son equivalentes:

i) A es diagonalizable en $K^{n\times n}$.

ii) $\bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} = K^n$.

iii) $\mathcal{X}_A = (X-\lambda_1)^{a_1} \dots (X-\lambda_r)^{a_r}$ y $a_i = \dim E_{\lambda_i}$ para cada $1 \leq i \leq r$.

Ejercicio 3. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que su polinomio minimal es $m_f = p.q$ con p y q coprimos. Probar que existen subespacios S y T de V invariantes para f tal que $m_{f|_S} = p$, $m_{f|_T} = q$ y $S \oplus T = V$.

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible.

i) Probar que existe $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica tal que $C^2 = A^t.A$. (Sugerencia: notar que $A^t.A$ es simétrica.)

ii) Para la matriz C hallada en el ítem anterior, probar que $A.C^{-1}$ es ortogonal.

Ejercicio 5. Decidir si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones. Justificar.

i) Sean A y B matrices en $K^{n\times n}$ tales que $\mathrm{rg}(A) = n-1$. Entonces $\mathrm{rg}(A.B) \geq \mathrm{rg}(B) - 1$.

ii) Sea f, g, h transformaciones lineales de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^2$ tales que $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Nu}\ (g) \subseteq \mathrm{Nu}\ (h)$. Entonces $h \in < f, g >$.

iii) Sea $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ tal que $m_A = (X+1)^3(X-1)$ y $\dim\ (\mathrm{Nu}\ (A+Id)^2) \leq 4$. Entonces $\det A = -1$.

iv) Sea $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ una transformación lineal. Entonces existe $v \in \mathbb{C}^2$ tal que $m_v = m_f$.

Los ejercicios 1, 2 y 3 requieren una demostración teórica completa.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: CARRERA:

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012
Final (22/2/2013)

---

1. *Producto de espacios vectoriales*
   Sean V, W K-espacios vectoriales. Se define
   $$V \times W = \{(v, w), \forall\, v \in V, \forall\, w \in W\}.$$
   Este conjunto resulta un K-espacio vectorial con las operaciones
   $$(v_1, x_1) + (v_2, w_2) = (v_1 +_V v_2, w_1 +_W w_2) \text{ y } k(v, w) = (k \cdot_V v, k \cdot_W w).$$
   Exhibir una base de $V \times W$ en función de una base de V y una base de W (demostrar). ¿Cuál es la dimensión de $V \times W$ si V y W tienen dimensión finita?

---

2. Sean $A, B \in K^{n\times n}$.
   (a) Probar que $\text{rg}(AB) \leq \min\{\text{rg}(A), \text{rg}(B)\}$.
   (b) Probar que si $A\,B = 0$, entonces $\text{rg}(A) + \text{rg}(B) \leq n$.
   (c) Probar que si $\text{rg}(A) + \text{rg}(B) < n$, entonces existe un vector columna $x \in K^n$ que satisface $Ax = 0$ y $Bx = 0$.

---

3. Sean L_1, L_2 dos rectas en K^n, con $n \geq 2$. Probar que existe un plano Π que contiene a L_1 y L_2 si y solo si L_1 y L_2 no son alabeadas.

---

4. Sea $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f \in \text{End}(V)$. Probar que si f admite una base ortonormal de autovectores, entonces f es normal, i.e. $f \circ f^* = f^* \circ f$.

---

5. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\text{tr}(A^k) = 0$ para todo $1 \leq k \leq n$. Probar que A es nilpotente.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: CARRERA:

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012
Final (1/3/2013)

---

1. Sea V un K-espacio vectorial, y sean S, T, R subespacios de V. Definir lo que significa que

$$V = S \oplus T \oplus R$$

en términos de bases de S, T y R y en términos de sumas e intersecciones de S, T y R, y probar la equivalencia de las dos formulaciones.

---

2. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n.

   (a) Sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ una base de V^* y sean $x_1, \dots, x_n \in K$. Probar que existe $v \in V$ tal que $\varphi_1(v) = x_1, \dots, \varphi_n(v) = x_n$.

   (b) Sean $\psi_1, \dots, , \psi_n \in V^*$ no nulos. Probar que

$$\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \text{ es base de } V^* \iff \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Nu}(\psi_i) = \{0\}.$$

   (Para la vuelta, se puede por ejemplo intentar probar que la matriz que se obtiene de escribir $\psi_1, \dots, \psi_n$ en función de la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ es inversible, y justificar cuidadosamente todas las afirmaciones.)

---

3. Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Probar que $\mathrm{tr}(A^*A) = 0 \iff A^*A = 0$.

---

4. Sean $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ y $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, y sea $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n) \times (m+n)}$.

   (a) Calcular el minimal de C en función del minimal de A y el minimal de B.

   (b) Probar que C se diagonaliza si y solo si A y B se diagonalizan.

---

5. Sea $X := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : \ \mathrm{rg}(A) = 1\}$. Determinar un representante para cada clase de equivalencia, para la relación de equivalencia "semejanza" en X.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: CARRERA: E-MAIL:

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012
Final (8/3/2013)

---

1. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $m \geq n$, de rango exactamente n. Probar que existe $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ de rango n también tal que $BA = \mathrm{Id}_n$.

---

2. Sea $(V, \langle\,,\,\rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno, y sea $\{e_1, \dots, e_s\}$ un conjunto ortonormal de vectores de V.

   (a) Dado $v \in V$, sea $v_s = \sum_{i=1}^{s} \langle v, e_i\rangle e_i$. Calcular $\|v_s\|^2$, $\langle v_s, v\rangle$ y $\langle v, v_s\rangle$.

   (b) Calcular $\|v - v_s\|^2$ y probar la *Desigualdad de Bessel*: para todo $v \in V$,

$$\sum_{i=1}^{s} |\langle v, e_i\rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

---

3. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que $\mathcal{X}_A(B) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es inversible si y solo si A y B no tienen autovalores en común.

---

4. Sea $(V, \langle\,,\,\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, y sean $f, g \in \mathrm{End}(V)$ dos transformaciones autoadjuntas.

   (a) Probar que si f y g conmutan, entonces, para todo autovalor λ de f, se tiene que:
   - el autoespacio $E_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$ es g-invariante también,
   - $E_\lambda^\perp$ es f-invariante y g-invariante.

   (b) Probar que f y g conmutan si y sólo si existe una base ortonormal de V formada por autovectores comunes de f y g.

---

5. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Se dice que $f \in \mathrm{End}(V)$ es *idempotente* si $f^2 = \mathrm{id}_V$. Para V de dimensión finita, probar que f es idempotente si y solo si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[f]_\mathcal{B}$ es diagonal, con los elementos de la diagonal iguales a 1 o -1.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: CARRERA: E-MAIL:

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012
Final (9/4/2013)

---

1. Sean los endomorfimos $D, \int$ de $K[X]$ definidos en la base canónica de $K[X]$ por $D(1) = 0$, $\int 1 = X$, y $D(X^n) = nX^{n-1}$, $\int X^n = \frac{X^{n+1}}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calcular $D \circ \int$, y luego $D^m \circ \int^m$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$.
   Deducir que $\int^m \circ D^m$ es un proyector, para todo $m \in \mathbb{N}$.
   (b) Para cada $m \in \mathbb{N}$, determinar $\mathrm{Nu}(\int^m \circ D^m)$ e $\mathrm{Im}(\int^m \circ D^m)$.

---

2. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que A tiene rango 1 si y solo si existen dos vectores columna x, $y \in K^n$ tales que $A = x\, y^t$.

---

3. Sea el $\mathbb{R}$- espacio vectorial $C([-1, 1]) = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : f$ es continua $\}$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt$. Determinar el complemento ortogonal del subespacio de las funciones pares.

---

4. (a) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n, y sea $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ un conjunto linealmente independiente. Probar que si W es un subespacio de V de dimensión estrictamente mayor que $n - k$, entonces existe $w \in W$ no nulo tal que $w \in \langle v_1, \ldots, v_k\rangle$.
   (b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Probar que si $v^t A v > 0$ para todo vector $v \neq 0$ en un subespacio $S \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión m, entonces A tiene al menos m autovalores positivos (contando multiplicidad). (Sug: suponer que la cantidad k de autovalores positivos es menor que m y llegar a una contradicción.)

---

5. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con todos sus autovalores iguales a 1. Probar que A es semejante a A^2.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: CARRERA: E-MAIL:

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012
Final (25/6/2013)

---

1. *Producto de espacios vectoriales:*
   Sean V, W K-espacios vectoriales (no necesariamente de dimensión finita). Se define el producto cartesiano de V por W:
   $$V \times W = \{(v, w) : v \in V, w \in W\}.$$
   Este producto cartesiano resulta ser un K-espacio vectorial con las operaciones
   $$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 +_V v_2, w_1 +_W w_2) \;\; \text{y} \;\; k \cdot (v, w) = (k \cdot_V v, k \cdot_W w)$$
   (no hace falta probarlo).
   Exhibir una base de $V \times W$ en función de una base de V y una base de W (demostrar).
   ¿Cuál es la dimensión de $V \times W$ si V y W tienen dimensión finita?

---

2. (a) Sea $(u_1, \ldots, u_n)$ una base ortogonal de $\mathbb{R}_n$ y sea $U := (u_1 | \cdots | u_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz cuyas columnas son los vectores (columna) $u_1, \ldots, u_n$. Probar que $|\det(U)| = \|u_1\| \cdots \|u_n\|$. (Sugerencia: calcular $U^t U$.)
   (b) Sea $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_n)$ una base de $\mathbb{R}^n$ y sea $(u_1, \ldots, u_n)$ la base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ que se obtiene aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a $\mathcal{B}$. Probar que para $1 \leq i \leq n$ se tiene $\|v_i\|^2 \geq \|u_i\|^2$, y que $\det(v_1 | \cdots | v_n) = \det(u_1 | \cdots | u_n)$.
   (c) *Desigualdad de Hadamard* (por el matemático francés Jacques Hadamard, 1865-1963):
   Probar que para todo $V := (v_1 | \cdots | v_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ son vectores columna cualesquiera, se tiene
   $$\big|\det(V)\big| \leq \|v_1\| \cdots \|v_n\|.$$

---

3. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la matriz que tiene todos los coeficientes iguales a 1.
   (a) Probar que A es diagonalizable, y determinar D diagonal y P inversible tal que $D = P^{-1}AP$.
   (b) Sea $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$. Probar que B es diagonalizable, y determinar D diagonal y P inversible tal que $D = P^{-1}BP$.

---

4. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Probar que $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: MAIL:
LIBRETA: CARRERA:

Algebra Lineal - 1er Cuatrimestre 2014
Final (29/07/2014)

1. Sean $A, B \in K^{n\times n}$.
   (a) Probar que: $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}(B) \iff N(AB) = N(B)$.
   (b) Probar que: $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}(B) \iff N(A) \cap E_c(B) = \{0\}$.

---

2. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f \in \operatorname{End}_K(V)$.
   Se recuerda que $f^t \in \operatorname{End}_K(V^*)$ es el endomorfismo definido por $f^t(\varphi) = \varphi \circ f$, $\forall \varphi \in V^*$.
   (a) Probar que $(\operatorname{Im}(f))^\circ = \operatorname{Nu}(f^t)$ y que $\operatorname{Im}(f^t) = (\operatorname{Nu}(f))^\circ$.
   (b) Probar que si $V = \operatorname{Nu}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$, entonces $V^* = \operatorname{Nu}(f^t) \oplus \operatorname{Im}(f^t)$.

---

3. Lema de Schur: Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que A es unitariamente semejante a una matriz triangular superior, es decir existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $U^{-1}AU$ es una matriz triangular superior.

---

4. (a) Sea $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ con $m_A = \lambda^2 + 1$. Probar que A es semejante a $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Sea $k \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathbb{R}^{2k\times 2k}$ con $m_A = \lambda^2 + 1$ (ojo, A tiene coeficientes reales). Probar que A es semejante (sobre $\mathbb{C}$) a $\begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{Id}_k \\ \operatorname{Id}_k & 0 \end{pmatrix}$.
   (En realidad es semejante sobre $\mathbb{R}$ pero no se pide probar eso.)

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: MAIL:
LIBRETA: CARRERA:

Algebra Lineal - 1er Cuatrimestre 2014
Final (05/08/2014)

---

1. Sean U, V, W K-espacios vectoriales de dimensión finita, y $f \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$, $g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Probar que $\dim(\mathrm{Nu}(g \circ f)) \leq \dim(\mathrm{Nu}(f)) + \dim(\mathrm{Nu}(g))$.

---

2. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión *infinita*, y sea $\mathcal{B}$ una base de V. Para cada $v \in \mathcal{B}$, sea $\varphi_v \in V^*$ dada por $\varphi_v(v) = 1$ y $\varphi_v(\omega) = 0$, para todo $\omega \in \mathcal{B}$ distinto de v.
Probar que $V^* \neq \langle \varphi_v ; v \in \mathcal{B} \rangle$.

---

3. Sea $(V, \langle\, , \rangle)$ un K-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Deados $u, v \in V$, se define el endomorfismo $f_{u,v}$ de V por $f_{u,v}(\omega) = \langle \omega, v \rangle u$, $\forall\, \omega \in V$. Probar que
   (a) $f^*_{u,v} = f_{v,u}$.
   (b) $f_{u,v} \circ f_{\omega,z} = f_{u,\langle v,\omega \rangle z}$.
   (c) $\mathrm{tr}(f_{u,v}) = \langle u, v \rangle$.

---

4. Probar que si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica, y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son sus autovalores (eventualmente repetidos), entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2.$$

---

5. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f \in \mathrm{End}_K(V)$ tal que $m_f = p \cdot q$ con p, q polinomios irreducibles distintos en $K[\lambda]$.
   (a) Probar que existen $v, \omega \in V$ con $m_{v,f} = p$ y $m_{\omega,f} = q$.
   (b) Calcular $m_{v+\omega,f}$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: MAIL:
LIBRETA: CARRERA:

Algebra Lineal - 1er Cuatrimestre 2014
Final (04/09/2014)

1. Sean A y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que si $\mathrm{rg}(A) = n-1$, entonces $\mathrm{rg}(A\cdot B) \geq \mathrm{rg}(B) - 1$.

2. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^3)^*$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)), \forall x \in \mathbb{R}^3$. Probar que f es un epimorfismo si y solo si $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ es un conjunto linealmente independiente en $(\mathbb{R}^3)^*$.

3. Sea en $\mathbb{C}^{n\times n}$ el producto interno canónico $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A\cdot B^*)$. Sea $P \in GL(n,\mathbb{C})$ y $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n\times n})$ definida por $f(A) = P^{-1}\cdot A\cdot P$.
   (a) Calcular f^* y deducir que si P es una matriz hermitiana (i.e. autoadjunta), entonces f es autoadjunta.
   (b) Para P hermitiana, probar que si v, $w \in \mathbb{C}^n$ son vectores columna autovectores de P, entonces $v\cdot w^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es un autovector de f. ¿Con qué autovalor?

4. Sea $A \in K^{n\times n}$.
   (a) Probar que si $D = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$ es una matriz diagonal con r unos y luego $n-r$ ceros en la diagonal, entonces $\mathcal{X}_{AD} = \mathcal{X}_{DA}$.
   (b) Probar que si $P \in GL(n,K)$, entonces $\mathcal{X}_{AP} = \mathcal{X}_{PA}$.
   (c) Probar que para todo $B \in K^{n\times n}$ se tiene que $\mathcal{X}_{AB} = \mathcal{X}_{BA}$ (sug: usar equivalencia de matrices).

5. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz de rango 1.
   (a) Probar que el polinomio característico de A es $\mathcal{X}_A = (\lambda - \mathrm{tr}(A))\lambda^{n-1}$, y deducir que $\det(\mathrm{Id}_n - A) = 1 - \mathrm{tr}(A)$.
   (b) Determinar todas las formas de Jordan posibles de A según el valor de $\mathrm{tr}(A)$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4	5	Calificación

Apellido y Nombre /No. de libreta:

Álgebra lineal

Examen final – 20/02/2015

---

(1) Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Demuestre que si $AB = I$ entonces $BA = I$.

(2) Enuncie y demuestre el teorema de la dimensión del anulador.

(3) Defina el polinomio minimal de una matriz y demuestre que el minimal divide al polinomio característico.

(4) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sean $f, g \in V^*$. Demuestre que $\ker f = \ker g$ si y sólo si existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $f = \lambda g$.

(5) Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y sea $p\colon V \to V$ un proyector ortogonal. Demuestre que valen las siguientes afirmaciones:

(a) $(\mathrm{im} p)^{\perp} = \ker p$.

(b) $(\ker p)^{\perp} = \mathrm{im} p$.

Justifique todas sus respuestas.