

Algebra I
Examen Final (21/10/2021)

1. Se define la siguiente relación \mathfrak{R} en G_{50} :

$$z \mathfrak{R} \omega \iff z\omega^{24} \in G_2.$$

- (a) Probar que \mathfrak{R} es una relación de equivalencia.
 - (b) Calcular la cantidad de elementos que hay en cada clase de equivalencia.
-

2. Sean $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de Fibonacci definida por

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \quad \text{y} \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \quad \forall n \geq 0,$$

y $(L_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de Lucas definida por

$$L_0 = 2, L_1 = 1 \quad \text{y} \quad L_{n+2} = L_n + L_{n+1}, \quad \forall n \geq 0.$$

Probar que para todo $n \geq 1$ se tiene que

$$F_n = \frac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5}.$$

3. Determinar todos los $a, b \in \mathbb{N}$ que satisfacen simultáneamente que

$$(a : b) = -2a + b \quad \text{y} \quad [a : b] = 83a.$$

4. Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio de grado $n \geq 3$ con una raíz $\alpha \in \mathbb{C}$ de multiplicidad (exactamente) 3. Probar que el resto de dividir a f' por $(X - \alpha)^3$ es de la forma $c(X - \alpha)^2$ donde $c \in \mathbb{C}$ es no nulo.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS