

1	2	3	4

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: Ge...  
 CARRERA: Ge...  
 ¿LLENÓ LA ENCUESTA?

LIBRETA Y NO. DE ORDEN: 200113  
 CUATR. APROBACIÓN TPS: u...  
 CUATR. APROBACIÓN TALLER: ...

**Algebra I**  
**Examen Final (10/12/2021)**

1. Sea  $V = \{1, 2, \dots, 499, 500\}$ . Se define en  $\mathcal{P}(V) \setminus \emptyset$  la relación  $\mathcal{R}$ :

$$A \mathcal{R} B \iff \min(A) = \min(B) \text{ y } \max(A) = \max(B),$$

(donde si  $X$  es un subconjunto no vacío de  $V$ ,  $\min(X)$  denota el menor elemento de  $X$  y  $\max(X)$  denota el mayor elemento de  $X$ . Por ejemplo para  $X = \{2, 5, 8\}$ ,  $\min(X) = 2$  y  $\max(X) = 8$  mientras que para  $X = \{5\}$ ,  $\min(X) = \max(X) = 5$ ).

- (a) Probar que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia en  $\mathcal{P}(V) \setminus \emptyset$  y calcular el cardinal de las clases de  $X = \{1, 100\}$  y de  $Y = \{50\}$ .  
 (b) ¿Cuántas clases de equivalencia tiene la relación  $\mathcal{R}$ ?

2. Determinar los posibles restos al dividir por 252 de todos los  $a \in \mathbb{Z}$  que satisfacen que

$$(a^{225} + 10a + 1 : 252) = 14.$$

3. (a) Determinar todos los  $n \in \mathbb{N}$  para los cuales

$$X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + X^n + 1.$$

(b) Calcular el resto de dividir a  $X^{6n} + X^{3n} + 1$  por  $X^2 + X + 1$ .

4. Sea  $f \in \mathbb{C}[X]$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$  una raíz de  $f$  de multiplicidad exactamente 5. Definimos la sucesión de polinomios  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  como

$$f_1 := f \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X - \alpha)^2 f_n + f^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Encontrar y probar una fórmula para la multiplicidad exacta de  $\alpha$  como raíz de  $f_n$ .  
 (Enunciar cuidadosamente todas las propiedades vistas en la teórica utilizadas.)

**JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS**