Segundo parcial de Lógica y Computabilidad, 13-07-2010

B **Ejercicio 1** Sean ϕ, β enunciados de un lenguaje de primer orden, y sea x una variable. Probar que el siguiente enunciado es universalmente válido:

$$(\forall x(\phi \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\phi \rightarrow \forall x\beta))$$

B **Ejercicio 2** Sean $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ funciones de una variable tales que $g(n) = f^3(n) + f(n) + 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Probar que si g es recursiva primitiva, entonces f es recursiva primitiva.

B **Ejercicio 3** Sea $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ una función computable. Probar que la función $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ definida por $g(n) = f(1) * f(2) * \ldots * f(n)$ $\forall n \in \mathbf{N}$ es computable, donde $*$ denota la concatenación de números naturales. (Ej: $123 * 405 = 123405$).

B **Ejercicio 4** Dar un ejemplo de un subconjunto B de los números naturales que son pares tal que B no sea recursivo.

B **Ejercicio 5** Sea $B = \{x \in \mathbf{N} : \psi_x \textit{ es total}\}$. Probar que B^c no es recursivamente enumerable.

NOTA: No escribir con lápiz

1)

$$\alpha = (\forall x\ (\phi \to \beta) \to (\forall x\ \phi \to \forall x \beta))$$

PARA PROBAR QUE α ES UNIVERSALMENTE VALIDO VOY A MOSTRAR QUE $\neg\alpha$ ES UNIVERSALMENTE INVALIDO Y PARA ESO VOY A ARMAR SU ÁRBOL Y MOSTRAR QUE TODAS SUS RAMAS SE CIERRAN

$$\neg\alpha = \neg(\forall x\ (\phi \to \beta) \to (\forall x\ \phi \to \forall x\ \beta))$$

1	$\neg\alpha$		
2	$(\forall x\ (\phi \to \beta))$		ABRÍ DE 1
3	$\neg(\forall x\ \phi \to \forall x \beta)$		ABRÍ DE 1
4	$\forall x\ \phi$		ABRÍ DE 3
5	$\neg(\forall x\ \beta)$		ABRÍ DE 3
6	$\exists x\ (\neg\beta)$		ABRÍ DE 5
7	$\neg\beta_{x_0}$		ABRÍ DE 6
8	$\phi_{x_0} \to \beta_{x_0}$		ABRI DE 2
9	$\neg\phi_{x_0}$	β_{x_0}	ABRÍ DE 8
10	ϕ_{x_0}	X	ABRÍ DE 4
	X		

CERRÉ AMBAS RAMAS POR LO CUAL PROBÉ QUE NO HAY MANERA DE SATISFACER $\neg\alpha$ POR LO CUAL α ES UNIVERSALMENTE VALIDO

USÉ LA NOTACION ϕ_{x_0}, β_{x_0}, ESO SIGNIFICA QUE VALEN ESTO CUANDO LA VARIABLE QUE ESTABA CUANTIFICANDOLO ES x_0 (ESTÁ INSTANCIADA EN x_0)
ES DECIR EN LA LINEA 4 TENGO UN "$\forall_x \phi$" ENTONCES EN LA LINEA 10 INSTANCIÉ EN PARTICULAR PARA EL $x=x_0$ INVOLUCRADO

2)

$$g(n) = f^3(n) + f(n) + 1 \quad \forall n$$

SI DEFINO A

$$f(n) = \min_{0 \leq y \leq g(n)} \left(g(n) = y^3 + y + 1 \right)$$ ✓

SI PIENSO EN LA FUNCION $y = x^3 + x + 1$
ES CRECIENTE PARA LOS POSITIVOS ✓ (en realidad en todo $\mathbb{R}$)
POR LO CUAL, SI HAY UN NATURAL QUE RESUELVE DADO UN y FIJO
ESTA ENTRE 0 Y y PQ SI $x = y$ $y^3 + y + 1 \geq y$ Y COMO ES CRECIENTE
TIENE QUE ESTAR EN EL MEDIO ✓

BUSCAR EL MINIMO ACOTADO ES RECURSIVO PRIMITIVO
Y LAS OPERACION ES ARITMETICAS QUE USO Y DE COMPARACIÓN TMB

POR LO CUAL $f(n)$ ES RECURSIVO PRIMITIVO ✓

3)

EL PROGRAMA DE $g(n)$

```
[A]  IF X0 = 0 GOTO B
     Z2 ← f(X0)
     Z3 ← 10^Z1      → por ceros (Nuevo concatenar)
     Z3 ← Z2 * Z3
     Z1 ← Z1 + LARGO(Z2)        // ACTUALIZO LARGO
     Y ← Y + Z3                 // ACTUALIZO CADENA
     X0 ← X0 - 1                // DISMINUYO CONTADOR
     go TO [A]
[B]  Y ← Y
```

DONDE LA FUNCIÓN LARGO ME DICE LA CANTIDAD DE DÍGITOS

LARGO:

```
     IF X = 0 GOTO B
     Z1 ← X
[A]  IF Z1 = 0 GOTO C
     Z1 ← Z1 DIV 10
     Y ← Y + 1
     GOTO A
[B]  Y ← Y + 1
[C]  Y ← Y
```

f ES COMPUTABLE, DESPUES ESTOY USANDO TODOS MACROS VISTOS EN CLASE, COMPUTABLES.

DIV : DIVISION ENTERA

POTENCIA:

MULTIPLICACION, ETC TODOS VISTOS, SINO SALEN TRIVIALMENTE

4)

$B = \{ x \in N \,/\, x \text{ es Par} \wedge \varphi_x(x) \downarrow \}$ ✓

No es recorsivo

Si lo fuese $\Rightarrow$ $\exists$ $C_B(x)$ computable ✓

$$C_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \Leftrightarrow x \text{ es Par} \wedge \varphi_x(x)\downarrow \\ 0 & \text{sino} \Leftrightarrow x \text{ es Impar} \vee \varphi_x(x)\uparrow \end{cases}$$ ✓

Armo $g(x) = \begin{cases} \uparrow & C_B(x) = 1 \\ 2 & C_B(x) = 0 \end{cases}$ ✓

Como $C_B(x)$ es computable $g(x)$ también
Sea $e = \#P$ con P programa que computa $g(x)$ ✓

Si e es par

$$g(e) = \begin{cases} \uparrow & C_B(e) = 1 \Leftrightarrow e \text{ es Par} \wedge \varphi_e(e)\downarrow \Leftrightarrow \varphi_e(e)\downarrow \text{ Abs!} \\ 2 & C_B(e) = 0 \Leftrightarrow e \text{ es Impar} \vee \varphi_e(e)\uparrow \Leftrightarrow \varphi_e(e)\uparrow \text{ Abs!} \end{cases}$$ ✓

En ambos casos llego a un absurdo pues $g(e)\uparrow$ sii $\varphi_e(e)\downarrow$ $\Leftrightarrow g(e)$
y sino $g(e) = 2 \Leftrightarrow \varphi_e(e)\uparrow$ ✓

Ahora si e es impar significa que
$e = [\ldots\ldots] - 1$
$e+1$ es par osea que $[2^t \ldots\ldots]$ con $t \neq 0$ ✓
$t \neq 0$ sino sería impar ✓

⇒ TOMO EL CODIGO DE e Y PONGO COMO PRIMERA INSTRUCCION "$Y \leftarrow Y$" QUE ES LA INSTRUCCIÓN DE CÓDIGO 0

ESTE CÓDIGO (e') HACE LO MISMO QUE EL DE e, COMPUTA g PERO EMPIEZA CON DICHA INSTRUCCION LO QUE GENERA

$$e' = \underbrace{[2^{0} \ldots \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{LOS EXPONENTES DE } e \text{ CON UNA BASE MÁS EN ORDEN DE LOS PRIMOS}}]}_{\text{IMPAR}} - 1$$

⇒ e' ES PAR Y COMPUTA $g(X)$

POR EL MISMO MOTIVO ANTERIOR LLEGO DE NUEVO A UN ABSURDO QUE SURGIÓ DE SUPONER QUE B ERA RECURSIVO

⇒ B NO ES RECURSIVO Y ES UN SUBCONJUNTO DE LOS $\mathbb{N}$ PARES

5)

SUPONGO QUE LO ES

$\Rightarrow \exists\ F(x)$ PARCIALMENTE COMPUTABLE

$$F(x) = \begin{cases} \downarrow & \text{SI } x \in B^c \\ \uparrow & \text{SI } x \notin B^c \Leftrightarrow x \in B \end{cases}$$

$H(x,y) = F(x)$

POR TEO RECURSIÓN

$\exists\ e \in \mathbb{N} \ /\ H(e,y) = \Phi_e(y)\ \forall y$

$$f(e) = H(e,y) = \begin{cases} \downarrow & \text{SI } e \in B^c \\ \uparrow & \text{SI } e \in B \end{cases} \quad \forall y$$

SI $e \in B^c$

$H(e,y) = \downarrow\ \forall y$ POR LO CUAL $\Phi_e(y)$ ES TOTAL ABSURDO PQ $e \in B^c$

SI $e \in B$

$H(e,y) = \uparrow\ \forall y$ POR LO CUAL $\Phi_e(y)$ NO ES TOTAL ABSURDO PQ $e \in B$

$\Rightarrow$ NO $\exists\ f(x)$ PARCIALMEN COMPUTABLE

$\Rightarrow B^c$ NO ES RE