

Tema 1

1	2	3	4	5	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA:

TURNO-COMISIÓN:
CARRERA:

ÁLGEBRA 1
Primer Parcial - 21/5/2011

1. Dado el conjunto

$$A = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a \leq 1000 \text{ y } b \leq 1000\},$$

se define la relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ de la siguiente forma:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff r_a(b) = r_c(d).$$

- Determinar si \mathcal{R} es reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica.
- Calcular la cantidad de elementos $(a, b) \in A$ tales que $(a, b)\mathcal{R}(1000, 500)$.

2. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números enteros definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -3,$$

y para $n \geq 3$,

$$\begin{cases} a_n = 2 - a_{n-1} & \text{si } n \text{ es impar} \\ a_n = \frac{a_{n-2} - a_{n-1}}{2} - 3 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Conjeturar el valor de a_n para todo n natural, y probar su validez.

3. Determinar cuántas funciones $f : \{1, 2, 3, \dots, 11\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 26\}$ hay que satisfacen simultáneamente las condiciones:

- f es inyectiva
- $9 \leq f(2) \leq 22$
- $f(4) + f(5) = 13$.

4. Hallar todos los posibles valores de $(a^2 + 8 : a + 1)$ para $a \in \mathbb{Z}$. Para cada valor d hallado determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ que satisfacen $(a^2 + 8 : a + 1) = d$.

- Hallar todos los n naturales tales que $3^n + 13n^2 + 38$ es divisible por 3.
- Probar que para todo n natural, $3^n + 13n^2 + 38$ es divisible por 3 o por 13.

Justifique todas sus respuestas.