

---

## Sistemas Axiomaticos

### Los axiomas, la geometría y la antigua Grecia

Si bien se tiene constancia de que las matemáticas y otras ciencias surgieron en más antiguas civilizaciones, aquí se le va a dar el foco a la antigua Grecia. Esto es porque en otras sociedades (por ejemplo, el antiguo Egipto) existían las matemáticas, pero solo de manera concreta. Es decir, contaban y hacían cálculos con objetos reales. A diferencia de los griegos, los cuales comenzaron a darle forma a teoremas generales y ecuaciones de manera abstracta.

Aquí vamos a destacar la figura de Tales de Mileto, el cual fue uno de los primeros griegos matemáticos en expresar estas fórmulas y soluciones para problemas generales. Un ejemplo sencillo es el del perímetro de un rectángulo, el cual todos sabían cómo calcular, pero no existía una fórmula general.

Si tenemos un campo rectangular de 200 metros por 100 metros, lo que haríamos si quisiéramos saber el perímetro es hacer  $200 + 200 + 100 + 100$ . Lo que haría Tales, en cambio, sería preguntarse el problema de manera general (¿cómo se calcula el perímetro de cualquier rectángulo sin importar el tamaño de sus lados?) y encontrar la fórmula que lo resuelva (en este caso:  $2 \times \text{lado corto} + 2 \times \text{lado largo}$ ).

### Euclides

Este filósofo y matemático griego también fue muy importante para la historia de la geometría, ya que escribió un libro donde organizó y sistematizó los distintos conocimientos acerca del tema, aparte de constituir los distintos enunciados y argumentos en un conjunto, todos conectados y dando sentido a toda la geometría y al propio estudio de la ciencia.

En el primer libro de su obra Euclides nos cuenta que para justificar las verdades matemáticas de las que va a hablar, es necesario determinar unos enunciados que funcionaran como punto de partida. Estos enunciados se aceptan sin demostración, y el filósofo los separa en tres grupos:

- *Los postulados (hoy en día, axiomas)*: son enunciados que hacen referencia a la ciencia en concreto de la que se está hablando, en este caso la geometría, y que a su vez tienen que ser evidentes. Euclides escribió cinco postulados para justificar sus conocimientos, aunque como veremos luego el quinto le trajo algunos problemas de demostración:
  1. Entre dos puntos siempre se puede trazar una línea.
  2. Una recta se puede prolongar indefinidamente por cualquiera de sus dos direcciones.
  3. Dado un punto y un segmento, se puede dibujar un círculo que tenga como centro el punto y como radio el segmento.
  4. Los ángulos rectos son iguales entre sí.

5. Si una línea recta corta a otras dos rectas de manera que la suma de los ángulos interiores de un mismo lado sea menor que dos ángulos rectos, entonces dichas rectas, prolongadas suficientemente, se cortan del mismo lado de la primera línea recta en que se encuentren aquellos ángulos cuya suma es menor que dos rectos.

- *Nociones comunes:* hacen referencia a los conceptos e ideas que se pueden aplicar a cualquier situación o contexto (no solo a la geometría, o a la ciencia incluso) y que también, son evidentes. Por ejemplo:

Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.

- *Definiciones:* Estos son los famosos puntos de partida, son la base de la que salen el resto de conceptos e ideas. Por ejemplo:

Un punto es lo que no tiene partes.

Una línea es una longitud sin anchura.

A partir de estas nociones, definiciones y postulados Euclides arma lo que se conoce cómo *teoremas*, los cuales son formulaciones para problemas en base a los enunciados antes mencionados. Por ejemplo, el teorema de Pitágoras (aunque este lo descubrió Pitágoras, otro gran matemático griego).

### **El problema del quinto postulado**

Hubo muchas discusiones en referencia al quinto postulado de la obra de Euclides, y al mismo matemático parece no convencerle del todo su existencia, intentando no usarlo durante gran parte de sus libros. El problema de este enunciado es que no resulta evidente, cómo los otros cuatro, por lo que algunas personas creen que debería ser un teorema, y está en base a los otros cuatro postulados. Esto se ha intentado demostrar pero siempre terminaban con que, si bien usa de base a los otros cuatro, el enunciado también se justifica a sí misma, cosa que no puede ser.

Por esto mismo, distintas personas han dado definiciones más sencillas a lo que Euclides trato de decir en su quinto postulado, y la que nosotros vamos a tomar cómo referencia es la dada por John Playfair, un matemático escocés, el cual redefinió al quinto postulado de la siguiente manera:

*Por un punto exterior a una recta, existe una única recta paralela a dicha recta.*

Esta definición logra ser más intuitiva que su predecesora, y es incluso la que se utiliza hoy en día cómo postulados en la geometría.

El matemático Saccheri intentó poner en duda el quinto postulado, y lo que hizo fue, tomando los cuatro postulados anteriores cómo premisas, y negando el quinto, intentó llegar a una contradicción. Si bien esto no avanzó de aquella idea, esto revolucionó la geometría entre la comunidad matemática, ya que trajo consigo nuevos conceptos e ideas.

### **Geometrías no euclidianas**

Distintos científicos, al ir negando los distintos postulados de Euclides fueron encontrando distintos sistemas, distintas geometrías.

El más conocido es Gauss, un matemático que, cambiando el quinto postulado a *Por un punto exterior a una recta existen infinitas paralelas a dicha recta* formó una nueva manera de geometría. Algunos cálculos y razonamientos se mantienen igual, mientras que otros cambian radicalmente (por ejemplo, la suma de los ángulos interiores de los triángulos ya no daban  $180^\circ$ , sino que daban menos). A esta geometría se le llama geometría hiperbólica, y muchos autores (además de Gauss) han escrito sobre la misma.

Existe un tercer tipo de geometría: la geometría elíptica. Descrita por Riemann, otro matemático importante, se define cómo la geometría en la que una recta no posee paralelo (es decir, las líneas paralelas no existen). Esto no sólo negaba el quinto postulado, sino también el segundo (ya que una línea no podía extenderse hasta el infinito, esta debía tener fin, y ese fin es la misma línea, encontrándose consigo misma).

Podemos verlo más fácil en el siguiente cuadro:

<b>Geometría</b>	<b>Cant. de paralelas</b>	<b>Suma de los ángulos interiores de un triángulo</b>	<b>Recta</b>
Euclidiana	Una	$180^\circ$	Infinita
Hiperbólica	Infinitas	Más de $180^\circ$	Infinita
Elíptica	Ninguna	Menos de $180^\circ$	Cerrada

Cómo hemos visto, si existen postulados para cierto tema o contexto, se pueden negar para dar paso a nuevos conceptos o sistemas, expandiendo más el abanico de posibilidades abstractas del pensamiento. Esto es muy útil para dar paso a nuevas concepciones, pero hay que tener en cuenta que no siempre se puede dar, ya que podría dar lugar a contradicciones entre los mismos postulados.

Por ejemplo:

1. El presidente es elegido por el pueblo.
2. El mandato del presidente dura cuatro años.
3. Luego de un primer mandato, el presidente puede ser reelecto.
4. Luego de un segundo mandato, puede ser reelecto.

No podríamos cambiarlo por:

1. El presidente es elegido por el pueblo.
2. El mandato del presidente dura cuatro años.
3. Luego de un primer mandato, el presidente puede ser reelecto.
4. El presidente nunca puede ser reelecto.

### **Los axiomas hoy en día**

En base a todo lo dicho hasta recién, vamos a explicar cómo son tratados y utilizados los axiomas en la actualidad. Este término hace referencia a los enunciados que son aceptados sin demostración alguna, ya que son utilizados para justificar o poner a prueba otros enunciados. También existen los teoremas, que son lo que los axiomas van a intentar justificar. Los teoremas utilizan reglas de inferencia y distintos métodos para verificar su veracidad (véase, la unidad 1).

Los enunciados están escritos con términos (expresiones del lenguaje que poseen un significado), los cuales se dividen en dos tipos: los términos lógicos y los términos no lógicos. Los primeros hacen referencia a palabras o expresiones generales (*todos, si... entonces, y, etc*). Los términos no lógicos, en cambio, son los entes referentes al tema del que se habla (por ejemplo, en la geometría serían los términos longitud, punto, recta, etc).

Los términos no lógicos, a su vez, se dividen en otros dos grupos: los términos primitivos y los términos definidos. Los términos primitivos son aquellos que se aceptan y entienden sin definición alguna, mientras que, por otro lado, los términos definidos son aquellos que se definen a partir de los primitivos.

Obviamente, aparte de todo lo mencionado, existen las llamadas reglas de formación, que hacen referencia a las reglas lingüísticas con la que componemos los enunciados (y por ende, los teoremas). Sin estas reglas, no podríamos expresar ideas, o mejor dicho, no podríamos comprendernos los unos a los otros.

Teniendo todo esto en cuenta, vamos a responder a la pregunta de qué función cumplen los puntos de partida en los enunciados (o los axiomas, mejor dicho). Resulta que de no existir estos puntos de partida estaríamos frente a enunciados que no pueden ser demostrados de ninguna manera. De no tener los axiomas, pasarían dos cosas:

1. O bien, para justificar un enunciado, usamos otro enunciado, y para justificar ese segundo enunciado usamos un tercero, y así sucesivamente, lo cual no tiene sentido.
2. O bien, terminamos en un círculo vicioso. Para justificar A, usamos B, y para justificar B usamos A, lo cual tampoco tiene sentido.

Para evitar estas situaciones imposibles de verificar es necesario tener puntos de partida, enunciados o definiciones que ya “se dan por hecho” o no necesitan demostración, es decir, los axiomas.

### **Propiedades de los axiomas**

Para que un sistema axiomático sea considerado cómo tal, debe poseer ciertas características, cumplir unos requisitos. Los más comunes suelen ser la independencia, la consistencia y la completitud.

Un axioma debe ser independiente, en el sentido de que no necesita de otros axiomas para justificarse, ya que pasaría a ser un teorema.

La consistencia está en la veracidad del axioma. Por ejemplo, un sistema de axiomas no puede afirmar el argumento A y luego la negación de A, ya que eso es imposible de demostrar.

La completitud hace referencia a que todos los teoremas que se han querido demostrar han sido demostrados. Si no queda ninguna verdad por fuera del sistema, se lo considera completo.

## **La revolución Darwiniana**

### **La teleología y la ciencia en el mundo antiguo**

Una explicación teleológica es una en la que la definición o explicación de cierto suceso se da en base a la función que ese suceso u objeto cumple. Por ejemplo, si decimos que la jirafa tiene el cuello largo para poder alcanzar los frutos que crecen alto en los árboles, estaríamos aplicando una definición teleológica, porque hacemos referencia a una función u objetivo, y no al motivo del suceso (no respondemos él porque la jirafa tiene el cuello largo, sino el para qué). Este tipo de explicaciones eran las que se daban en momentos como la antigua Grecia, ya que les parecía lógico que la naturaleza tuviera un objetivo o meta que alcanzar.

Esta visión sería reemplazada por la cosmovisión cristiana que se comenzara a expandir en Europa con la Edad Media. Esta explicación seguía siendo teleológica, ya que explicaba todo en base a la función que Dios quería que cumpliera, por lo que no fue un gran cambio en cuanto a visiones del mundo.

Todo esto implica que antes de Darwin todas las explicaciones a los distintos sucesos de la naturaleza eran teleológicas, buscaban su función y no su motivo. Por eso decimos que Darwin creó una revolución, y es que es uno de los padres de la ciencia y del método científico tal y como lo conocemos hoy en día, tanto en la práctica como a la hora de argumentar y dar explicaciones.

### **La teoría de la selección natural y sus antecedentes**

Antes de hablar de esta teoría tenemos que dar una explicación de los conceptos básicos de los que partió Darwin. La tesis de Darwin sobre el origen de las especies se puede reducir en tres grandes rasgos, ya que es: evolucionista, gradualista y habla de un origen común.

En primer lugar es evolucionista porque no habla de que las especies a medida que avanzan las generaciones van sufriendo de mutaciones, y solo sobreviven los más aptos (los que más “mutaciones beneficiosas” posean). En segundo lugar es gradualista porque explica que esto se da a lo largo del tiempo, no de manera espontánea o repentina. Debe darse la cantidad justa de tiempo para empezar a ver un cambio notable. En último lugar, Darwin habla de que todas las criaturas no son independientes, sino que todas tenemos un antecedente común del que nacen las demás especies (y las diferencias surgen por las mutaciones y el largo tiempo).

Aparte de esto, Darwin toma en cuenta el trabajo del matemático y sociólogo Thomas Malthus, el cual en sus obras explica cómo las distintas poblaciones crecen exponencialmente, a diferencia de los recursos, que crecen de manera lineal. Esto significa que los recursos en algún momento se iban a quedar cortos para sostener a la población, lo cual según Malthus llevaría a volver a la ley del más fuerte y lo salvaje.

La teoría de la selección natural de Darwin dice que las distintas especies se reproducen y sobreviven en base a determinados mecanismos, los cuales agrupó en cuatro categorías distintas:

Herencia	Variación	Eficacia	Aptitud
Todas las especies se parecen a sus progenitores, conservan rasgos de sus padres. Es decir, unos perros negros van a tener de cría a otro perro negro, es muy difícil que eso cambie, aunque se pueda dar el caso.	A su vez, nunca van a ser completamente iguales a ellos. Si bien conservan características generales, siempre se diferencian de algún modo. El perro, siguiendo esta lógica, podrá variar cosas como su tamaño.	Esta es la ventaja o desventaja de la mutación genética, ya que van a prevalecer los que al cambiar se adaptan mejor al ambiente. Aquí distinguimos dos grandes grupos: las mutaciones de viabilidad y de fertilidad.	La aptitud tiene que ver con la relación entre la especie y el ambiente. Es un vistazo general de la eficacia de las mutaciones, ya que hace referencia a cómo la especie se adapta al medio a lo largo del tiempo.

A partir de estos conceptos la teoría de la selección natural nos explica no sólo el origen de las especies, sino el motivo de la tanta variedad que existe en este planeta. Retomando y dándole fin al ejemplo de la jirafa, podemos explicar que en base a una escasez de comida, las jirafas que se mantenían con vida eran las que podían alcanzar distintos frutos, y cómo las de cuello largo se fueron reproduciendo entre sí, dio a lugar a que más jirafas con cuello aún más largo nacieran.

### **La evidencia**

Las evidencias más claras radica en observar tanto la selección natural como la artificial. Es evidente que una cría va a ser parecida a sus progenitores pero no exactamente igual, ya que lo podemos ver en los mismos humanos sin ir más lejos. Con la selección artificial podemos hacer un ejemplo con los perros, ya que algunas de las razas de los perros son creadas por nosotros, los humanos.

Un perrito lindo y chiquito, con otro perro lindo y chiquito, para que tengan un perrito aun más lindo y aún más chiquito. Así sucesivamente hasta que no se parezca en nada a sus antecesores, así funciona la selección artificial y, cómo la natural, resulta evidente su eficacia y funcionamiento.

Aparte de esto podemos incluir otras ciencias, cómo la paleontología o la biogeografía. Estas dos precisamente apoyaron mucho la teoría Darwiniana, ya que podemos ver los ancestros de criaturas que ahora no se parecen en nada a su antecesor, pero que mantienen rasgos similares. La biogeografía, por otra parte, es la ciencia de la distribución de la vida en la tierra, con la que también podemos ver cómo en algunas islas, especies cómo pájaros o ciertos mamíferos son muy distintas a sus “versiones continentales”, y esto se debe a la específica fauna y flora de esa isla en particular.

Por último, vamos a mencionar lo que Darwin denominó “la homología de ciertas especies”, lo cual hace referencia a las características que tienen en común especies que, a simple vista, son muy diferentes. Por ejemplo, podemos notar una asombrosa similitud en la estructura ósea (forma y distribución de los huesos) del ala de un ave y la mano de un humano, lo cual puede sonar contra intuitivo, pero en realidad refuerza la teoría del origen común.

### **Repercusiones y sesgos de la teoría Darwiniana**

Obviamente, Darwin agitó las aguas a la hora de presentar esta idea ante el mundo. En una sociedad donde aún se veían a los dioses y a la mitología cómo una manera viable de explicación a los distintos sucesos, Darwin causó una catarata de conflictos y debates, aparte de burlas y desprestigio hacia su persona y su labor cómo científico. Darwin renunció a la idea de la creación de Dios o el plan divino de alcanzar un punto máximo de grandeza, y redujo todo a un mero conjunto de azarosas mutaciones y una larga línea de tiempo.

Hoy en día muchas feministas están analizando los trabajos de distintos científicos, corrigiendo y dando testimonio de distintos sesgos contra la mujer de la época. Los trabajos de Darwin no son la excepción, ya que en sus propias palabras el habla de las hembras (y más específicamente, las mujeres) cómo “seres claramente inferiores, tanto en cuerpo cómo en mente, en comparación a los hombres”. Es por eso que se ha tratado de comprobar si estos comportamientos se dan sólo en ciertas especies, o si es algo completamente natural, o si fue una de esas cuestiones azarosas, pero el debate continúa. Aun así, cabe destacar que esas frases y pensamientos de Darwin son, en efecto, un sesgo de la época que atenta contra las mujeres.