HOJA 4

Tengo que contar el cardinal de este último conjunto

Voy a contar los divisores positivos ~~[illegible]~~ primero

$$\#\{2^i 3^j 5^k \quad 0 \leq i \leq 5,\ 1 \leq j \leq 6,\ 1 \leq k \leq 4\}$$

i puede tomar 6 valores, j puede tomar 6 valores

k puede tomar 4 valores, como cada decisión es independiente una de otra puedo multiplicar

$6 \cdot 6 \cdot 4 = 144$ DIVISORES POSITIVOS de 14580000 que son congruentes a 0 mod 15

Y yo sé que cada divisor positivo tiene un negativo asociado, o sea que hay 144 DIVISORES NEGATIVOS de 14580000 que son congruentes a 0 mod 15

Finalmente,

$$\#\{a \in \mathbb{Z} / a R 14580000 \wedge a \equiv 0 (15)\}$$

$$= 144 + 144 = 288$$

3) $f = x^5 + 15ax^4 + 12bx^3 - 18x^2 - 1$ con $a,b \in \mathbb{Z}$

Empiezo notando que $f \in \mathbb{Z}[x]$ pues $a,b \in \mathbb{Z}$ por lo tanto todos sus coeficientes son enteros

Puedo usar entonces el lema de Gauss que dice que si f tiene raíces racionales entonces deberán ser de la forma $\frac{a}{b}$ donde $a \mid -1$, o sea que en este caso
$b \mid 1$

$(a:b)=1$ ¡Era mejor usar otras letras!

los únicos candidatos a raíces racionales son ± 1

Voy a buscar los $a,b \in \mathbb{Z}$ tq 1 es raíz racional de f, 1 es raíz de f $\Leftrightarrow f(1) = 0$

$$f(1) = 1^5 + 15 \cdot a \cdot 1^4 + 12 \cdot b \cdot 1^3 - 18 \cdot 1^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$15a + 12b - 18 = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$15a + 12b = 18$$

$\Rightarrow$ ECUACIÓN DIOFÁNTICA

- Chequeo si $(15:12) \mid 18$
  $3 \mid 18$ ✓ entonces HAY SOLUCIONES

- Comienzo la ecuación dividiéndola por el MCD

$$15a + 12b = 18$$
$$\Updownarrow$$
$$5a + 4b = 6$$

• Ahora busco solución particular a ojo

Veo que $5 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = 1$ $\big\} \cdot 6$

$5 \cdot 6 + 4 \cdot (-6) = 6$ entonces $(a_0, b_0) = (6, -6)$ es solución particular

• Armo el sistema de soluciones

$$S = \left\{ (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \Big/ \begin{array}{l} a = 12K + 6 \\ b = -15K - 6 \end{array} \text{ con } K \in \mathbb{Z} \right\}$$

Faltan soluciones
Hay que trabajar con la ec.

$5a + 4b = 6$
$\Rightarrow a = 4k + 6$
$b = -5k - 6$

Los $a, b \in \mathbb{Z}$ tienen que ser de esta forma para que 1 sea raíz de F. Veamos ~~para~~ ahora que -1 no es raíz de F

~~[illegible]~~

$F(-1) = (-1)^5 + 15 \cdot (12K+6) \cdot (-1)^4 + 12 \cdot (-15K-6) \cdot (-1)^3 - 18(-1)^2 - 1$
$= -1 + 180K + 90 + 12(15K+6) - 18 - 1$
$= 180K + 70 + 180K + 72 = 0$

$\Leftrightarrow$

$360K + 142 = 0$

$\Leftrightarrow$

$K = -\frac{142}{360}$

Arrastra error

pero dijimos que $K \in \mathbb{Z}$

y $360 \nmid -142$ pues 360 es más grande que -142 en módulo

Entonces 1 es la única raíz ~~[illegible]~~ racional de F, pues -1 no es raíz

Veamos ahora que 1 es raíz SIMPLE de f, o sea que $f'(1) \neq 0$. Pues ya sé que $f(1)=0$

$$f' = 5x^4 + 60ax^3 + 36bx^2 - 36x$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 5\cdot 1^4 + 60\cdot(12k+6)\cdot 1^3 + 36(-15k-6)\cdot 1^2 - 36\cdot 1 \\ &= 5 + 720k + 360 - 540k - 216 - 36 \\ &= 180k + 113 \end{aligned}$$

y $f'(1) = 0 \iff 180k + 113 = 0 \iff 180k = -113 \iff k = \dfrac{-113}{180}$

pero sabemos que $k \in \mathbb{Z}$, entonces es imposible que $f'(1)=0$
entonces $f'(1) \neq 0$ pues $180 \nmid -113$

Probamos entonces que 1 es raíz de f, es la única raíz racional y que es SIMPLE (para los pares $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ hallados al principio)

Repito el procedimiento, pero ahora voy a pedir que -1 sea raíz racional de f, es decir $f(-1)=0$

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^5 + 15a(-1)^4 + 12b(-1)^3 - 18(-1)^2 - 1 \\ &= -1 + 15a - 12b - 18 - 1 \\ &= 15a - 12b - 20 \end{aligned}$$

entonces $f(-1)=0 \Leftrightarrow 15a-12b-20=0 \Leftrightarrow$

$15a-12b=20$

↳ ECUACIÓN DIOFÁNTICA

• Chequeo si tiene soluciones

$(15:-12)=(15:12)=3$ ¿$3 \mid 20$? NO, entonces no hay soluciones $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ que satisfagan la ecuación

entonces $\nexists\, (a,b)\in\mathbb{Z}^2$ tq $f(-1)=0$, o sea no existen $a,b\in\mathbb{Z}$ para los cuales -1 sea raíz de f

Se concluye el ejercicio

4) Busco $a\in\mathbb{Z}$ tq $f(b)=0$ con $b\in\mathbb{Z}$

$f(b)=b^5-(4i-4)b^4-(16i+8)b^3+(16i-11)b^2-(20i-16)b-a$

$=b^5-4b^4i+4b^4-16b^3i-8b^3+16b^2i-11b^2-20bi+16b-a$

$=(b^5+4b^4-8b^3-11b^2+16b-a)+(-4b^4-16b^3+16b^2-20b)i=0$

$$\begin{cases} b^5+4b^4-8b^3-11b^2+16b-a=0 \\ -4b^4-16b^3+16b^2-20b=0 \Leftrightarrow 4b(-b^3-4b^2+4b-5)=0 \end{cases}$$

$b=0 \quad \vee \quad -b^3-4b^2+4b-5=0$

$\Downarrow$

HOJA 7

O sea quiero que b sea raíz de $-x^3-4x^2+4x-5$

Puedo usar lema de Gauss pues es un polinomio $\in \mathbb{Z}[x]$

Las posibles raíces racionales son $\pm 5, \pm 1$, las ~~paso~~ pruebo uno por uno en la calculadora para ver cuando me da 0

Encontré que $b=-5$ es raíz de este polinomio
Uso Ruffini para dividir, pues $x+5 \mid -x^3-4x^2+4x-5$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & -4 & 4 & -5 \\ -5 & & 5 & -5 & 5 \\ \hline & -1 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

entonces $-x^3-4x^2+4x-5 = (x+5)(-x^2+x-1)$

Busco las raíces de $-x^2+x-1$ $\quad \dfrac{-1 \pm w}{-2}$

donde w es tal que $w^2 = 1^2-4 = -3$

~~[illegible]~~

pero ese polinomio tiene raíces complejas, no me interesa entonces, lo dejo.

Encontré que $b=0 \vee b=-5$

Para que $b=0$ sea raíz entera debe ocurrir que:

$$b^5 + 4b^4 - 8b^3 - 11b^2 + 16b - a = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 + 0 - 0 - 0 + 0 - a = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a = 0$$

Para que $b=-5$ sea raíz entera debe ocurrir que:

$$(-5)^5 + 4(-5)^4 - 8(-5)^3 - 11(-5)^2 + 16(-5) - a = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$20 - a = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{a = 20}$$

(no llegué con el tiempo)
para terminar el ejercicio