1	2	3	4

CALIF.

NOMBRE: CARRERA: LU:

Álgebra Lineal (Final 9 de agosto de 2017)

1. Sea V un K-espacio vectorial finitamente generado y S y T subespacios de V. Probar que

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T).$$

---

2. (a) Sea V un $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno y $\|\cdot\|$ la norma inducida por ese producto interno. Probar que para todo $x, y \in V$ se verifica que

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

   (b) Se define en $\mathbb{R}^2$ la norma $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$. Probar que no existe en $\mathbb{R}^2$ un producto interno que induzca esa norma.

---

3. Consideramos $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico. Definir, si es posible, $F \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que F sea autoadjunta, 1 sea autovalor de F, $\mathrm{tr(F)} = 5$ y $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ sea el autoespacio correspondiente a algún autovalor de F.

---

4. Sea $A \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ nilpotente de índice 3.

   (a) Probar que para todo $1 \leq j \leq 3$ se tienen las inclusiones estrictas $\mathrm{Nu(A^{j-1})} \subset \mathrm{Nu(A^j)}$ y que para todo $j \geq 3$ vale que $\mathrm{Nu(A^j)} = \mathbb{C}^7$.

   (b) Probar que si $\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{C}^7$ es un conjunto l.i. tal que $\langle v_1, v_2\rangle \cap \mathrm{Nu(A^2)} = \{0\}$, entonces $\{Av_1, Av_2\}$ es un conjunto l.i. tal que $\langle Av_1, Av_2\rangle \cap \mathrm{Nu(A)} = \{0\}$.

   (c) Concluir que $\{v_1, v_2, Av_1, Av_2\}$ es un conjunto l.i.

   (d) Si se sabe que $\dim \mathrm{Nu(A)} = 3$, hallar todas las posibles formas de Jordan de A.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen