Parcial de Lógica

Lógica y Computabilidad

4 de julio de 2008

Este examen se aprueba obteniendo al menos **6 puntos**. El parcial es a libro abierto y se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras. En el caso de usar resultados de las guías de ejercicios, se deben incluir las demostraciones.

Ejercicio 1.

I. (**1 p.**) Demostrar que si Γ es un conjunto maximal consistente de lógica proposicional, entonces $\Gamma = \mathrm{Con}(\Gamma)$.

II. (**1 p.**) Decidir si vale también la recíproca, i.e., que si Γ es consistente y $\Gamma = \mathrm{Con}(\Gamma)$, entonces Γ es maximal consistente. Justificar.

Ejercicio 2.

I. (**0,5 p.**) Exhibir $\mathcal{M}$, φ, v, v' tales que $\mathcal{M}, v \models \varphi$ pero $\mathcal{M}, v' \not\models \varphi$.

II. (**1,5 p.**) Sea φ una fórmula de primer orden y sea $Fv(\varphi)$ el conjunto de sus variables libres. Demostrar que para cualquier par de valuaciones v y v' tales que $v(x) = v'(x)$ para toda $x \in Fv(\varphi)$, se tiene,

$$\mathcal{M}, v \models \varphi \text{ sii } \mathcal{M}, v' \models \varphi$$

III. (**1 p.**) Demostrar que si φ es una sentencia (i.e. no tiene variables libres) entonces

$$\mathcal{M} \models \varphi \text{ sii existe } v \text{ tal que } \mathcal{M}, v \models \varphi$$

Sugerencia: Usar el punto anterior.

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad para razonar sobre árboles que posea un símbolo de relación binario R. Informalmente, leeremos $R(a, b)$ como "a es padre de b".

I. (**1 p.**) Mostrar que para todo $k \geq 0$ existe una fórmula de $\mathcal{L}$, $\varphi_k(x)$, con sólo una variable libre, x, tal que $\mathcal{M}, v \models \varphi_k(x)$ sii $v(x)$ tiene al menos k sucesores distintos ($\mathcal{M}$ es una $\mathcal{L}$-estructura arbitraria).

II. (**2 p.**) Demostrar que no es posible dar una fórmula de $\mathcal{L}$, $\varphi(x)$, con sólo una variable libre, x, tal que $\mathcal{M}, v \models \varphi(x)$ sii $v(x)$ tiene una cantidad finita de sucesores.

Ejercicio 4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar:

I. (**1 p.**) "Si Γ es computable, entonces $\{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\}$ es r.e."

II. (**1 p.**) "Para todo lenguaje sin igualdad $\mathcal{L}$, existe una sentencia de $\mathcal{L}$, φ, tal que $\mathcal{M} \models \varphi$ sii $\mathcal{M}$ tiene finitos elementos ($\mathcal{M}$ es una $\mathcal{L}$-estructura)."