

**Final de Álgebra I**  
25/07/2018

**1**

Sea  $A = \{n \in \mathbb{N}/n \leq 30\}$  y la relación  $R$  en  $A$  tal que

$$nRm \Leftrightarrow nm \text{ es cuadrado perfecto}$$

Probar que es una relación de equivalencia y calcular la partición de  $A$  que define a  $R$ .

**2**

Sea  $a \in \mathbb{R}_{>0}$

**2.1**

Probar que  $x^2 + ax - 1$  tiene una única raíz positiva  $c$  y que  $c$  es el único número tal que  $c(a + c) = 1$ .

**2.2**

Sea  $x_1 = \frac{1}{a}$  y  $x_{n+1} = \frac{1}{a+x_n}$ , probar que

$$x_2 < x_4 < x_6 < \dots < c < \dots < x_5 < x_3 < x_1$$

**3**

Determinar todos los primos positivos tales que

$$5p \mid 15^{p-1} + 225$$

**4**

Probar que  $z, w \in G_5 \Rightarrow (w^{21} + z^{14})^5 \in \mathbb{R}$

**5**

Factorice en  $\mathbb{Q}[x]$ ,  $\mathbb{R}[x]$  y  $\mathbb{C}[x]$ , al polinomio  $P(x) = x^6 - 6x^5 + 20x^3 - 18x - 7$  sabiendo que dos de sus raíces suman 1, el producto de las mismas es -1 y son múltiplos.