

4 LISTOP

0,30

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)
EXAMEN FINAL
(18/12/03)

NOMBRE Y APELLIDO:

Nº DE LIBRETA:

e-mail:

Nº DE HOJAS ENTREGADAS:

EL EXAMEN FINAL SE APRUEBA CON 50 PUNTOS

ENUNCIAR LAS PROPIEDADES QUE SE UTILIZAN

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1. (25 puntos)

- (a) Enunciar y probar el Teorema de probabilidad total.
- (b) Dar un ejemplo de aplicación del teorema.
- (c) Sean A y B eventos de un espacio muestral S . Probar que si A y B son independientes entonces también lo son A y B^c .

2. (25 puntos)

- (a) Sea X una variable aleatoria con distribución $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Hallar su función generadora de momentos, su esperanza y su varianza.
- (b) Sean $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$ e $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$ variables aleatorias independientes. Deduzca la distribución de $X + Y$. ¿Es alguna distribución conocida?

3. (25 puntos) Sean X_1, \dots, X_n v.a. i.i.d. con distribución $N(2, \sigma^2)$.

- (a) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de σ^2 . Llamar $\hat{\sigma}^2$ al estimador obtenido.
- (b) ¿Qué distribución tiene el estadístico $T = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$? Justificar. SUGERENCIA: recordar que si $Z \sim N(0, 1)$ entonces $Z^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- (c) Hallar el error cuadrático medio de $\hat{\sigma}^2$
- (d) Si tuviese que elegir entre $\hat{\sigma}^2$ y $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ para estimar σ^2 , ¿cuál elegiría? Justificar.

4. (25 puntos) Sean X_1, \dots, X_n v.a. i.i.d. con distribución $B(1, p)$.

- (a) Suponga que se desea realizar un test de hipótesis para testear

$$H_0 : p = \frac{1}{4} \quad \text{vs} \quad H_1 : p > \frac{1}{4}.$$

Proponga un test de nivel aproximado α para decidir entre la dos hipótesis y muestre que el test propuesto tiene el nivel deseado.

- (b) Calcular aproximadamente la probabilidad de no rechazar H_0 cuando en realidad $p = \frac{1}{3}$.

