



Sistemas axiomáticos

Material de lectura

Origen de los primeros conocimientos geométricos

La característica fundamental de los documentos encontrados tanto en la Mesopotamia como en Egipto es que contienen conocimientos aislados, no articulados entre sí. Allí aparecen resueltos algunos problemas de índole práctica, de los que no se ofrece prueba alguna o método de resolución; simplemente se resumen los resultados.

En los textos matemáticos egipcios, por ejemplo, el tratamiento de los números y de las figuras era de carácter concreto, no abstracto. Podemos encontrar en ellos afirmaciones parecidas a que "25 aceitunas más 15 aceitunas son 40 aceitunas", pero no aparece explicitado el cálculo abstracto " $25+15=40$ ". Del mismo modo, no se hace referencia a figuras geométricas abstractas (rectángulo, círculo), sino a cuerpos materiales concretos, como un terreno rectangular o una vasija circular.

La geometría prehelénica –o sea, anterior a la civilización griega– constituye una técnica cuyo fin fundamental era la práctica. Intentaba dar respuesta a problemas concretos y de índole cotidiana, por eso muchos de sus resultados fueron solo aproximados.

Si bien estos conocimientos no configuraban un sistema –es decir, no se hallaban relacionados entre sí, no estaban organizados–, es conveniente resaltar su importancia, ya que les permitieron construir obras de gran envergadura como diques, estatuas, templos, pirámides, repartir tierras, calcular áreas y volúmenes, entre otras múltiples aplicaciones.

Geometría griega

Hacia el siglo VII a.C., comienza a desarrollarse una forma de pensamiento para tratar de explicar los fenómenos de la naturaleza. Ello ocurre en las ciudades griegas de la costa egea del Asia Menor, que recibieron la influencia de los fenicios, los egipcios y los cretenses, por vía marítima, y de los pueblos del Asia Menor, por vía terrestre.

Si bien la posición geográfica fue un factor importante, ella no explica por sí sola el surgimiento del *genio*, es decir *la imaginación creativa del pueblo griego*. A este factor hay que sumarle razones de índole política y social que permiten explicar el desarrollo intelectual de los griegos, cuya nueva actitud frente a la naturaleza se basaba en el intento de ofrecer explicaciones de los fenómenos naturales sin apelar a elementos míticos o sobrenaturales.

En este contexto surgieron algunos pensadores –como Tales de Mileto, Anaximandro y Anaxímenes– que inauguraron una forma de especulación racional sobre la naturaleza que constituye el origen histórico de lo que llamamos *ciencia*. Ellos reconocieron la importancia de la teoría como organizadora de la práctica. Esto significa que los conocimientos prácticos, basados en la experiencia, tenían que poder explicarse a partir de nociones teóricas. Sobre la base de estas nuevas ideas, los conocimientos de carácter concreto, singular y sin articulación de los egipcios y de los babilonios se fueron desarrollando y adquirieron un carácter más abstracto y un grado mayor de generalización, al tiempo que se iban integrando en un único cuerpo de conocimiento.

Entre pensadores mencionados en el párrafo anterior, nos interesa la figura de Tales de Mileto (nacido alrededor del 585 a.C. y muerto hacia el 545 a.C.). Fue uno de los primeros matemáticos y astrónomos griegos, y uno de los primeros en utilizar métodos deductivos en la geometría. Es decir, un método que permite justificar un enunciado a partir de otros enunciados ya conocidos.

La principal contribución de Tales no fue la resolución de problemas geométricos –muchos de los cuales ya la tenían–, sino el tratamiento general de esos problemas. Esto le permitió formular y aplicar propiedades de carácter general y dar más importancia a los métodos involucrados en la resolución de problemas que a las soluciones particulares.

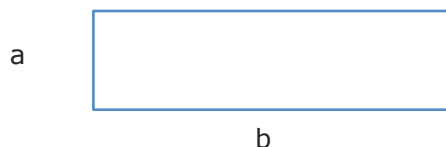
Veamos dos ejemplos para entender la diferencia. Cuando nos referimos a hallar soluciones particulares a problemas concretos (como hacían los pueblos de la Mesopotamia), pensamos en una situación como la siguiente:

Supongamos que tenemos un campo rectangular de 200 m de largo por 100 m de ancho. Si queremos averiguar cuántos metros de alambre se necesitan para cercar el campo, tendremos que calcular el perímetro de ese campo sumando las medidas de sus lados: $P = 200+100+200+100 = 600$.

Y allí tenemos la respuesta: se necesitan 600 metros de alambre. Hemos resuelto un problema de forma particular.

En cambio, cuando hablamos del tratamiento general de los problemas, nos referimos a un caso como el que está a continuación:

Queremos obtener una expresión que nos permita calcular el perímetro de cualquier rectángulo sin importar la medida de sus lados.



Si llamamos a y b a sus lados, podremos calcular su perímetro: $P = a+b+a+b = 2a + 2b$. Ahora, hemos resuelto el problema de forma general.

Euclides y la geometría

La tarea de sistematización de los conocimientos matemáticos alcanza un hito fundamental con los trabajos de Euclides, matemático considerado padre de la geometría. Si bien no existen muchos datos sobre su vida, se suele ubicar su existencia durante el reinado de Ptolomeo, entre los años 367 a.C. y 283 a.C., en Alejandría. Esta ciudad –considerada la capital cultural y científica de la época– fue fundada por Alejandro Magno en el año 331 a.C., en la desembocadura del río Nilo.

Euclides logró sistematizar, por primera vez, los conocimientos geométricos cuya finalidad inmediata no era la resolución de problemas concretos, a la manera de los egipcios y de los babilonios. Cuando hablamos de *sistematizar*, nos referimos a presentar los enunciados articulados, organizados, estructurados entre sí; es decir, no se trata de presentar enunciados sueltos, sin relación entre ellos, sino de mostrar cómo se van infiriendo –o deduciendo, para decirlo de manera más precisa– unos de otros.

Elementos es el título de la obra más importante de Euclides porque, aunque en su momento pasó casi inadvertida, tuvo gran relevancia en el desarrollo de la geometría. Se trata de una obra en la que se perfeccionan, de manera rigurosa, y se sistematizan los conocimientos geométricos anteriores. Allí, el autor adoptó la perspectiva aristotélica, según la cual:

La ciencia es un conjunto de afirmaciones sobre un determinado objeto –en este caso la geometría–, con el requisito de que ellas sean generales y necesariamente verdaderas. La exigencia de generalidad radica en la convicción aristotélica de que la ciencia trata sobre lo general y no sobre entidades particulares (por ejemplo, sobre los triángulos en general y no sobre uno específico). El enunciado de las oraciones necesariamente verdaderas, a diferencia del enunciado de las contingentes, es de esa manera y no podría ser de otro modo.

Las afirmaciones, además de ser generales y necesariamente verdaderas, deben estar articuladas de modo orgánico –tal como ya vimos a propósito de Tales–, mediante la aplicación de un razonamiento lógico que permita apoyar ciertas afirmaciones en otras que se toman como punto de partida, o como principios, y respecto de las cuales no se exige demostración (pues se trata de verdades evidentes). En relación con esto, el vocabulario utilizado en dichos enunciados distingue entre los términos que se toman como primitivos y los que se definen a partir de aquellos.

En *Elementos*, Euclides sistematiza no solo la geometría, sino toda la matemática conocida hasta entonces. Esta obra se desarrolla en trece libros: los cuatro primeros se refieren específicamente a la geometría plana. En el primero de estos cuatro, Euclides establece una serie de enunciados que se aceptan sin demostración y que constituyen los principios a partir de los cuales se va a poder demostrar el resto de los enunciados del sistema. Euclides distingue tres tipos de principios a los que denomina *postulados*, *nociones comunes* y *definiciones*, respectivamente.

• Los postulados –hoy en día denominados *axiomas*– son aquellos que se refieren a una ciencia en particular, en este caso la geometría, y son los siguientes (conviene aclarar que algunos postulados están reformulados por cuestiones de simplicidad, ya que su formulación original es más complicada):

1º Desde un punto a otro siempre se puede trazar una recta.

2º Una recta se puede prolongar indefinidamente en cualquiera de sus dos direcciones.

3º Dado un punto y un segmento, se puede construir un círculo que tenga a ese punto como centro y a ese segmento como radio.

4º Los ángulos rectos son iguales entre sí.

5º Si una línea recta corta a otras dos rectas de manera que la suma de los ángulos interiores de un mismo lado sea menor que dos ángulos rectos, entonces dichas rectas, prolongadas suficientemente, se cortarán del mismo lado de la primera línea recta en que se encuentren aquellos ángulos cuya suma es menor que dos rectos.

La formulación del postulado 5º que aquí damos es afín a la versión original enunciada por Euclides, y como se puede observar, es de una complejidad mucho mayor que la de los cuatro postulados anteriores. Este postulado 5º se conoce como *Postulado de las paralelas* y dará lugar –como veremos luego– a intensas discusiones y a cambios de gran importancia en la historia de la geometría.

El enfoque euclideano de la geometría, que se advierte al leer los postulados, es diferente del enfoque empírico que empleaban, por ejemplo, los egipcios. Los tres primeros postulados de Euclides muestran que no se hace referencia a ningún problema concreto que pueda ocurrir en circunstancias reales. En efecto, sobre la superficie terrestre puede haber muchos obstáculos, tales como montañas, mares, lagos, etc., que impiden el trazado de una línea recta de un punto a otro. También, en circunstancias reales, una línea vertical puede no extenderse siempre en línea recta (en la práctica, puede prolongarse solo una distancia finita hacia arriba o hacia abajo) o un círculo trazarse con un centro y un radio cualquiera (porque si la longitud del radio es muy grande, probablemente nos encontraremos con dificultades).

Euclides sabía todo esto, pero se despreocupaba de estas limitaciones prácticas. Para él, en teoría, una línea recta puede trazarse entre dos puntos aunque no podamos hacerlo en la práctica. Lo mismo ocurre con la prolongación de las rectas y el trazado de los círculos.

• Las *nociones comunes* hacen referencia a cuestiones generales que pueden aplicarse tanto a la geometría, como a otros ámbitos de la ciencia o de la vida cotidiana. Algunos ejemplos de estas nociones comunes son:

Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.

El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

- Con respecto a las *definiciones*, Euclides se despega de los lineamientos aristotélicos, según los cuales es necesario tomar ciertos términos como puntos de partida y no definirlos. Euclides define todos los términos con los que trabaja, por ejemplo *punto* o *recta*:

Un punto es lo que no tiene partes.

Una línea es una longitud sin anchura.

Aparentemente su intención fue dar descripciones someras de los objetos con los que trata la geometría para evitar que, en las demostraciones, se deslizaran errores causados por la vaguedad de los términos usados. Como veremos más adelante, las presentaciones axiomáticas de la actualidad son afines a las recomendaciones aristotélicas y no a la estrategia empleada por Euclides.

A partir de los postulados y de las nociones comunes, Euclides obtiene deductivamente una serie de enunciados llamados por él *proposiciones*, o en terminología contemporánea, *teoremas*. Las proposiciones o teoremas –que frecuentemente tienen la forma de enunciados universales– son enunciados verdaderos, ya que se obtienen deductivamente de los postulados y las nociones comunes. Recordemos que los postulados y nociones comunes se toman como verdaderos sin que sea necesaria su demostración

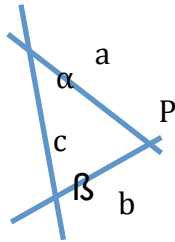
Euclides construye *demostraciones* de las proposiciones o teoremas, en las que a partir de las premisas se deduce la conclusión por aplicación de reglas de inferencia. Pero, a diferencia de lo que estudiamos en esta asignatura en relación con la construcción de deducciones, Euclides no explicita las reglas de inferencia, según las cuales procede en cada paso de la demostración. Solo parte de principios y va obteniendo sucesivas consecuencias. Será una preocupación central de los matemáticos y lógicos del siglo XIX, la explicitación de la lógica subyacente a las demostraciones geométricas.

El problema del quinto postulado

Ya enunciamos los cinco postulados de Euclides. Veamos ahora cómo se puede interpretar la formulación del quinto postulado (recordemos que esta es la formulación original de Euclides):

Si una recta c corta a otras dos a y b formando de un mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, esas dos rectas a y b se cortan del lado donde se encuentran los ángulos mencionados.

El siguiente gráfico representa la formulación anterior:



Si la recta c corta a las rectas a y b y la suma de los ángulos α y β es menor que dos rectos ($\alpha + \beta$ es menor que 180°), entonces las rectas a y b se cortan en el punto P .

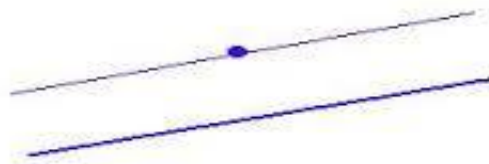
Recordemos que para Euclides, un requisito de los axiomas (o postulados) era que su verdad fuera evidente. Sin embargo, esta formulación del quinto postulado resulta ser mucho menos *evidente* que la de los cuatro primeros. El propio Euclides parece haber tenido dudas al respecto, ya que evitó utilizarlo en las demostraciones de los teoremas. Llama la atención que recién lo haya utilizado para demostrar la proposición (teorema) 29 del Libro I, aun cuando algunas de las demostraciones anteriores habrían sido más sencillas, si lo hubiera utilizado.

Esta aparente falta de evidencia que surge de la formulación original del quinto postulado – especialmente, en comparación con la formulación de los otros cuatro– hizo que los geómetras posteriores a la época de Euclides plantearan que el postulado era, en realidad, un teorema – es decir, que podía ser demostrado a partir de aquellos–. Si esto fuera así, implicaría que el quinto postulado no era *independiente* de los otros cuatro (un postulado o axioma es independiente si no puede deducirse del resto de los axiomas del sistema).

A lo largo de los siglos, se sucedieron diversos intentos de demostración del quinto postulado. Pero toda vez que se creía que se había alcanzado la demostración, se advertía que no se había partido solo de los cuatro primeros postulados (como era el propósito), sino que se había utilizado también otro enunciado. Y este nuevo enunciado siempre resultaba equivalente al quinto postulado, con lo cual, se había empleado en la demostración del postulado una versión distinta del mismo postulado que se quería demostrar.

El matemático escocés, John Playfair (1748-1719), elaboró la siguiente versión del quinto postulado que aún sigue vigente y con la que trabajaremos de aquí en adelante:

Por un punto exterior a una recta, puede trazarse una única paralela a dicha recta.



Los primeros intentos de demostración de este postulado se remontan al siglo I a.C y se deben

a Posidonio y a Gémino –astrónomos y matemáticos de esa época–, y en las traducciones al griego y al latín de los textos árabes, se encuentran algunos comentarios referidos al quinto postulado. Sin embargo, dado que la ciencia permaneció aletargada en Europa durante un largo período, recién en el siglo XVI se retoman los intentos de demostración del quinto postulado.

El trabajo de Saccheri

En el año 1733, fue publicado un trabajo de Giovanni Gerolamo Saccheri (1667-1733) en el que este matemático italiano presenta un enfoque metodológico diferente a los intentos anteriores por demostrar el quinto postulado. Se trata de una demostración indirecta, o por el absurdo. En vez de tratar de demostrar dicho postulado a partir de los cuatro primeros, intenta probarlo por vía indirecta, partiendo de los postulados 1º a 4º y de la negación del quinto postulado como supuesto provisional.

Saccheri suponía que negando el quinto postulado iba a encontrar una contradicción que lo llevaría a rechazar ese supuesto provisional y le permitiría, entonces, concluir la afirmación del quinto postulado. Si lo lograba, ello valdría como una demostración –de carácter indirecto– del postulado 5 a partir de los otros cuatro y probaría, por ende, que este no era independiente.

Aclaremos este punto: si como se sospechaba, el postulado 5º se deducía de los anteriores (es decir, no era independiente) y se introducía, ahora, su negación, la contradicción habría de surgir inexorablemente.

Si bien Saccheri usó la formulación original de Euclides, aquí analizaremos la versión más sencilla de Playfair:

Por un punto exterior a una recta, pasa una sola paralela a dicha recta.

¿En qué consiste negar ese postulado? Negarlo puede consistir en afirmar alguno de estos dos enunciados (en realidad, los casos analizados por Saccheri fueron tres, pero, nos basta con analizar estos dos):

Caso 1. Por un punto exterior a una recta, *no pasa ninguna* paralela.

Caso 2. Por un punto exterior a una recta, *pasan más de una* paralela.

Saccheri avanzó en la deducción de enunciados que resultaban de negar el postulado 5º y las contradicciones esperadas surgieron en el primer caso, pero no ocurrió lo mismo en el segundo.

Al partir de los cuatro primeros postulados más la negación del quinto ilustrada en el segundo caso, no llegó a ninguna contradicción, pero como obtuvo una cantidad de teoremas *extraños*, supuso que la contradicción estaba próxima y creyó haber vindicado, de este modo, la figura de Euclides. Paradójicamente, la contribución de Saccheri abrió las puertas para el desarrollo futuro de nuevas geometrías, pero esto ocurriría recién a principios del siglo XIX. Durante

mucho tiempo y tal como Saccheri lo había hecho, los geómetras rechazaron estas dos hipótesis que negaban el quinto postulado (casos 1 y 2); y ello ocurrió así porque la autoridad de Euclides, la confianza en la intuición y el contexto en el que estaban inmersos estos matemáticos pesaron más que sus propias conclusiones.

En los años posteriores a la publicación del trabajo de Saccheri –que permitió que se empezaran a incubar nuevas ideas en torno a la geometría–, continuó el intento de demostrar, por distintos métodos, el ya famoso quinto postulado, o Postulado de las paralelas. Varios trabajos, sobre todo en Francia, lograron avances importantes, pero ninguno de ellos pudo demostrar el quinto postulado. A fines del siglo XVII, todos estaban de acuerdo con D´Alambert (1717-1783; matemático y filósofo francés), quien decía: “La definición de las paralelas es el escándalo de la geometría”. Sin embargo, nadie lograba quitarle la categoría de postulado. Con ello, se seguía sosteniendo que el sistema euclídeo era el único sistema geométrico posible.

Geometrías no euclidianas

El matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue el primero que vio con claridad la independencia del quinto postulado y la posibilidad de construir una geometría distinta de la euclídea.

Recordemos que un postulado o axioma es independiente cuando no puede deducirse de los demás postulados o axiomas del sistema. Si el postulado quinto de Euclides fuera independiente, podría ser reemplazado por otro diferente y, manteniendo los demás postulados (1º a 4º), podría desarrollarse una nueva geometría a partir de ese nuevo grupo de postulados. Eso fue, precisamente, lo que hizo Gauss. Reemplazó el quinto postulado de Euclides por el siguiente:

Por un punto exterior a una recta, pueden trazarse infinitas paralelas a dicha recta.

Se trata de una versión del segundo caso mencionado a propósito de Saccheri. Gauss trabajó con este axioma y con los otros cuatro de Euclides, y demostró propiedades y teoremas que no lo llevaban a ninguna contradicción. Esta es **una de las ideas** que había explorado Saccheri y que rechazó (si bien no había llegado a una contradicción) porque supuso que había **algún error** en el desarrollo y que la contradicción debía existir, aunque él no hubiera podido hallarla.

La nueva geometría desarrollada por Gauss, en la que existen infinitas paralelas, demuestra teoremas distintos a los de la geometría euclídea. Por ejemplo, mientras que a partir de los cinco postulados euclidianos se puede demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos (180°), partiendo de los postulados que elige Gauss, resulta que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor de 180° .

Es interesante señalar que Gauss solo dio a conocer su trabajo (en 1829) en forma privada; nunca lo publicó porque pensaba que sus conclusiones geométricas podían ser consideradas insensatas para la mentalidad de la época. No quiso arriesgar el prestigio que había ganado con sus investigaciones, por las cuales se lo llamaba “el príncipe de los matemáticos”. Sin

embargo, la idea de geometrías no euclídeas ya estaba madura y no habría de pasar mucho tiempo para que irrumpiera en el horizonte de la matemática.

En 1823, se publicó un texto del matemático húngaro János Bolyai (1802-1860) que, con anterioridad, había sido incluido como apéndice de un libro de su padre, también matemático. En ese trabajo se exploraba la hipótesis de la existencia de infinitas paralelas. Gauss lo revisó y le dijo al padre que su hijo había llegado a las mismas conclusiones que él, pero que no pensaba publicarlas. Gauss también manifestó alegría porque el hijo de un amigo suyo lo hiciera.

En 1826, el matemático ruso Nikolái Lobachevski (1792-1856) presentó un trabajo –que habría de completar luego con otras publicaciones– en el que desarrolló un sistema geométrico que retomaba los cuatro primeros axiomas de Euclides y agregaba otro en el que se afirma la existencia de infinitas paralelas, tal como lo habían sugerido Gauss y Bolyai. Esta geometría – que se conoce como *geometría hiperbólica*– incluye teoremas que son comunes con los de la geometría euclídea (todos aquellos que se deducen solo de los cuatro primeros axiomas) y otros que no lo son (aquellos que se demuestran usando el quinto postulado; entre los últimos se encuentra el de la suma de los ángulos interiores de un triángulo que mencionamos más arriba). Muchos de los contemporáneos de Lobachevski, educados como nosotros en un mundo euclídeo, consideraron que esta geometría resultaba caricaturesca.

La geometría hiperbólica resulta de tomar la hipótesis de Saccheri que supone la existencia de infinitas paralelas. Faltaba estudiar la otra hipótesis, la de la existencia de ninguna paralela. Cuando Saccheri desarrolló esta hipótesis, había creído encontrar una clara contradicción.

En 1854, el matemático alemán Bernhard Riemman (1826-1866) presentó su tesis doctoral ante un jurado integrado, entre otros, por Gauss. En él se exploraban las consecuencias que surgían al negar el quinto postulado suponiendo la no existencia de rectas paralelas. Esta geometría se denomina *geometría elíptica* e implica otras modificaciones además de la del quinto postulado.

En este sistema la recta es cerrada, por lo cual tampoco se cumple el segundo postulado de Euclides (*Una recta se puede prolongar indefinidamente en cualquiera de sus dos direcciones*). Si la recta es cerrada, no puede ser infinita.

Al abandonar también el segundo postulado, Riemman evitaba las contradicciones halladas por Saccheri, quien había reemplazado el quinto postulado de Euclides manteniendo los otros cuatro sin cambios. Como consecuencia de los axiomas de Riemman, se puede probar como teorema que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que 180° .

Resumamos, a modo de conclusión, las principales características de las geometrías presentadas:

Tipo de geometría	Cantidad de paralelas	Suma de los ángulos de un triángulo	Recta
Euclides	Una	180°	Infinita
Lobachevski (hiperbólica)	Infinitas	Menor que 180°	Infinita
Riemman (elíptica)	Ninguna	Mayor que 180°	Cerrada

Hemos visto que los matemáticos geómetras lograron desarrollar diferentes sistemas, todos ellos incuestionables desde el punto de vista lógico: los nuevos conjuntos de axiomas permitían deducir nuevos teoremas, y tal conjunto de enunciados –por más extraños que resultaran para la geometría anterior– no mostraban contradicciones entre sí. Surgió entonces el problema de cómo interpretar estos nuevos sistemas axiomáticos, y en principio, fueron interpretados como juegos, como muestras de los alcances del ingenio y la imaginación humanos.

Así, durante más de veinte siglos la geometría euclideana fue considerada la única geometría, y fue también la geometría que describía el espacio físico. Los puntos, rectas y triángulos de los que hablaba Euclides eran los mismos que encontramos en los objetos de nuestra vida diaria y aquellos que acostumbramos dibujar. Allí, los ángulos interiores de un triángulo suman 180° y por un punto exterior a una recta, pasa una paralela y solo una.

De este modo, el surgimiento de las nuevas geometrías originó un cambio en el modo de concebir la disciplina. A partir de ese momento, se hizo ininteligible la distinción entre una geometría pura y una geometría aplicada, esto es, una geometría matemática y otra física. La primera describía estructuras posibles; la segunda pretendía describir la realidad física.

Progresivamente, estos sistemas axiomáticos fueron concebidos como *estructuras formales*, que partiendo de ciertos enunciados permitían construir estructuras coherentes desde el punto de vista lógico, que no referían a ninguna entidad concreta. Así, al hablar de *punto* o *recta*, no se hace referencia a algo en particular, no se alude a ninguna entidad específica, sino que son términos cuyo comportamiento queda establecido a partir de los axiomas. Veamos un ejemplo para aclarar este punto.

Supongamos que construimos un sistema axiomático –ahora no sobre geometría, sino sobre regímenes de gobierno– y decidimos tomar los siguientes enunciados como axiomas:

1. El presidente es electo por el pueblo.
2. El mandato del presidente dura cuatro años.
3. Luego de un primer mandato, el presidente puede ser reelecto.
4. Luego de un segundo mandato, no puede ser reelecto.

Podemos pensar que los axiomas son verdaderos -en efecto, lo son para el caso de la Argentina, pues nuestra Constitución establece esas condiciones para la elección del presidente, la duración de su mandato y las posibilidades de reelección-. Sin embargo, no resultan verdaderos en el caso de países que tienen otras formas de gobierno o modos de elección de presidente, duración del mandato y circunstancias de reelección. Pero en cualquier caso, un sistema que contase con estos principios es *consistente*. Que un conjunto de axiomas sea consistente quiere decir que no se deriva de ellos contradicción alguna. Sin embargo, también es consistente el siguiente sistema:

1. El presidente es electo por el pueblo.
2. El mandato del presidente dura cuatro años.
3. Luego de un primer mandato, el presidente puede ser reelecto.
4. Luego de un segundo mandato, puede ser reelecto.

Si bien este sistema no describe la organización política de la Argentina, sigue siendo una estructura política posible desde el punto de vista lógico (y, también, desde el punto de vista práctico, ya que así se organizan algunos países). Algo interesante podría ser la comparación de las consecuencias que se siguen en uno y otro caso, pero no es ese el tema de nuestro análisis. Solo pretendemos aquí destacar que los dos sistemas se ajustan a los criterios lógicos y son consistentes.

Por el contrario, esta nueva organización no podría implementarse:

1. El presidente es electo por el pueblo.
2. El mandato del presidente dura cuatro años.
3. Luego de un primer mandato, el presidente puede ser reelecto.
4. El presidente nunca puede ser reelecto.

Como puede observarse, surge una contradicción de la afirmación conjunta de 3 y 4. Este sistema no es consistente. Por eso, no puede implementarse (no importa que se esté hablando de regímenes de gobierno, si se trata de la Argentina o de otro país). El sistema falla desde un punto de vista lógico, porque hay una contradicción que lo hace inconsistente.

El siguiente sistema también es aceptable desde el punto de vista lógico, aunque desde un punto de vista práctico no pueda implementarse:

1. El presidente electo desarrolla superpoderes.
2. Los superpoderes duran mientras dure el mandato.
3. Luego de su mandato, el presidente no puede recuperar sus superpoderes.

Aunque el enunciado 1 exija del presidente habilidades que exceden la naturaleza humana, al analizar lógicamente el sistema conformado por estos tres axiomas, no surge ningún problema: el sistema es consistente, pues no presenta contradicción alguna; y ello es así, independientemente de que pueda implementarse en la realidad o no.

Advirtamos que los cuatro sistemas axiomáticos presentados no se refieren a ningún país determinado. En tal sentido, en tanto no hacen referencia a ninguna entidad concreta, los llamamos sistemas *formales*.

El punto por destacar es que, a partir de estos axiomas, podemos obtener las consecuencias que de ellos se derivan. Es posible desarrollar el sistema en sí mismo, aunque no se refiera a nada específico. Desde ya, podríamos, luego aplicarlo para el estudio de casos particulares. Para ello, habría que interpretar los términos involucrados en el sistema para que refieran a algo concreto. En nuestros ejemplos, deberíamos precisar el país al que nos estamos refiriendo cuando hablamos del régimen de gobierno.

Volvamos entonces a la geometría. Todo parecía indicar que la geometría euclideana era la geometría del espacio y que las otras eran más afines a la ficción que a la realidad. Una era la geometría que se aplicaba al mundo; las otras eran sistemas meramente formales. Pero esta historia tuvo un desenlace inesperado.

Las geometrías no euclidianas no resultaron ser simples ejercicios de lógica como se creyó al principio. Por el contrario, son ellas las que permiten interpretar el universo en el que vivimos. Estas geometrías han encontrado aplicaciones concretas en distintas ramas de la física, por ejemplo, la física del átomo y de las estrellas. Incluso, Einstein no habría podido desarrollar las ecuaciones de la teoría de la relatividad, si no hubiera contado con las herramientas que estas nuevas geometrías aportaron.

Sistemas axiomáticos desde una perspectiva contemporánea

En el apartado anterior analizamos el sistema axiomático de Euclides, que como hemos visto, siguió el modelo de ciencia demostrativa propuesto por Aristóteles. Nos ocuparemos ahora de caracterizar los sistemas axiomáticos desde la perspectiva formal contemporánea. Mostraremos que si bien existen similitudes entre esta perspectiva y los planteos de Euclides y de Aristóteles (en ambos casos se parte de axiomas y se deducen teoremas mediante reglas de inferencia, por ejemplo), también hay aspectos diferentes, como la interpretación de los términos utilizados (para la concepción clásica, ellos hacen referencia a una entidad concreta; para la concepción contemporánea, los términos no refieren a nada específico).

Siguiendo el criterio de sistematicidad y organización deductiva de los enunciados, en un sistema axiomático encontramos dos tipos o categorías de enunciados: *axiomas* y *teoremas*.

Los *axiomas* son los enunciados que se aceptan sin demostración y constituyen los puntos de partida de las demostraciones (aquellos que eran denominados *postulados* por Euclides). Pero, a diferencia de Aristóteles y de Euclides, no se exige que los axiomas sean verdades evidentes; los axiomas son ahora enunciados que se aceptan como puntos de partida del sistema. De acuerdo con el nuevo enfoque formal con que se aborda la formulación de los sistemas axiomáticos, la exigencia respecto de la verdad de los axiomas pierde sentido. Esto es así, en tanto se considera que los axiomas no refieren a entidades específicas, si son meros constructos formales, no cabe ni siquiera predicar de ellos verdad o falsedad –y mucho menos, entonces, exigirla–. (Sin embargo, anticipamos que al desarrollar el sistema se trabajará con ellos “como si fueran verdaderos”).

Por otro lado, los *teoremas* son enunciados que se demuestran, es decir, se obtienen deductivamente, a partir de otros enunciados mediante reglas de inferencia.

Los sistemas axiomáticos también deben incluir de modo explícito las *reglas de inferencia* que se utilizan para demostrar teoremas. Las reglas de inferencia presentadas en esta asignatura podrían ser candidatas a ocupar este lugar dentro de un sistema axiomático (seguramente en una versión formalizada de ellas). Estas reglas lógicas garantizan que, si se parte de enunciados verdaderos, las conclusiones también serán verdaderas. Aplicado a nuestro caso: si se admiten los axiomas como verdaderos, los teoremas también lo son.

Las demostraciones parten de axiomas o de teoremas ya demostrados previamente, y por aplicación de las reglas de inferencia, permiten obtener nuevos teoremas. Los axiomas de una demostración juegan un papel similar al de las premisas de una deducción, y los teoremas (último enunciado de una demostración) pueden ser asimilados a su conclusión. Una demostración es, entonces, una secuencia finita de pasos en donde cada uno se deriva de un enunciado anterior, que es o bien un axioma, o bien otro teorema que ya ha sido demostrado.

Todos estos enunciados están compuestos por términos (expresiones lingüísticas con significado), y podemos distinguir entre ellos dos tipos:

Términos lógicos (expresiones como *todos, son, pasan por, si...entonces, y, o, etc.*,)
Términos no lógicos: por ejemplo, en el caso de la geometría se refieren a entes geométricos (recta, punto, triángulo, círculo, ángulo, etc.)

Dentro de estos últimos podemos distinguir entre:

Términos primitivos: se aceptan y emplean sin definición
Términos definidos: se definen a partir de los primitivos

Tal como anticipamos, Euclides no realizó esta distinción y ofreció una definición, incluso de aquellos términos que hoy consideraríamos primitivos.

Varios siglos después, el matemático alemán David Hilbert (1862-1943) desarrolló una nueva sistematización –de carácter formal– de la geometría euclideana. En sus trabajos toma *punto, recta* y *plano* como términos primitivos, *sin incluir definición alguna*. El resto de los términos, por ejemplo, *paralela*, son definidos a partir de los términos tomados como primitivos. De modo que los sistemas axiomáticos actuales incluyen también definiciones, pero solo de ciertos términos: precisamente de aquellos llamados términos *definidos*.

Por último, los sistemas axiomáticos suelen incluir *reglas de formación* que indican cómo combinar los diferentes términos para dar lugar a expresiones complejas bien formadas. Por ejemplo, si intentáramos sistematizar axiomáticamente la aritmética, seguramente querríamos introducir reglas sintácticas que nos permitieran construir expresiones complejas tales como " $2+2=4$ " y no " $224+=$ " (aunque, por supuesto, las reglas podrían disponerse de otro modo). A diferencia de las reglas de inferencia –que permiten obtener consecuencias a partir de axiomas o teoremas ya probados–, las reglas de formación indican cómo construir sintácticamente los enunciados que podrán cumplir el rol de axiomas o teoremas.

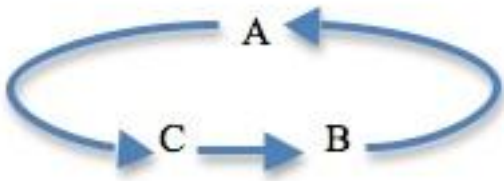
La selección de los axiomas

Hemos mencionado con anterioridad que los axiomas se toman como puntos de partida y que se los acepta como enunciados verdaderos sin que sea necesario demostrarlos. Podemos preguntarnos, entonces, por qué es necesario tomar estos puntos de partida y cómo decidir qué enunciados elegir como axiomas.

Trataremos de contestar a la primera pregunta. Supongamos que queremos justificar el enunciado *A*. Para ello necesitamos otros enunciados. Supongamos por simplicidad que solo necesitamos un enunciado, llamémoslo *B*, del cual podamos deducir *A*. Pero también tenemos que justificar *B*. En este caso, necesitaremos otro enunciado *C* del cual deducirlo. Y también tenemos que justificar *C*. Si no tomáramos un punto de partida, seguiríamos con este proceso indefinidamente y caeríamos en lo que se conoce como *regresión al infinito*. Gráficamente:



Se podría evitar esta regresión al infinito si *C* se dedujera de *A*. En ese caso, no se necesitaría otro enunciado para probarlo, pero caeríamos en un *círculo vicioso*. Gráficamente:



Vemos que para evitar estas dos circunstancias (regresión al infinito o círculo vicioso) es necesario aceptar algunos enunciados sin demostración.

En cuanto a cuáles son los enunciados que se tomarán como axiomas, dijimos que de acuerdo con la concepción de la época de Euclides, debían ser enunciados cuya verdad fuera *evidente*. Este criterio de evidencia –que ha sido dejado de lado en la axiomática moderna– tiene sus dificultades, ya que lo que es evidente para una persona podría no serlo para otra. Se trata de un criterio subjetivo, y por lo tanto, no es un criterio confiable.

También dijimos que en los sistemas axiomáticos modernos no se pretende que los axiomas sean verdades evidentes: solo son puntos de partida que se eligen de manera convencional, a tal punto, que lo que es un axioma en un sistema podría ser un teorema en un sistema diferente.

Si atendemos al carácter formal que tienen los axiomas, podemos comprender por qué ni siquiera se exige –ni se puede exigir– que sean verdaderos. En tanto enunciados formales, están compuestos por términos que no refieren a ningún objeto concreto y, entonces, esos enunciados no pueden ser ni verdaderos ni falsos. Solo cabe preguntarse por su verdad una vez que se asigna referencia (es decir, se otorga significado) a los términos del sistema y los enunciados son aplicados a un determinado dominio de objetos; dicho de otro modo: solo cabe preguntarse por la verdad de los axiomas cuando el sistema ha sido *interpretado*.

Propiedades de los sistemas axiomáticos

En los apartados anteriores hemos presentado los componentes de los sistemas axiomáticos. Ahora sistematizaremos los requisitos que deben cumplir tales sistemas. Algunos de ellos ya fueron discutidos a propósito de las geometrías no euclidianas.

- **Independencia:** un enunciado es independiente cuando no puede demostrarse a partir de los demás enunciados del sistema. Para que un sistema axiomático sea considerado independiente, todos sus axiomas deben serlo. Parece un requisito bastante razonable, ya que si uno de los axiomas pudiera deducirse de los otros, pasaría a ser un teorema y no tendría sentido conservarlo como axioma. Este requisito, aunque deseable, no es estrictamente necesario, ya que un sistema redundante (es decir, no independiente) no es pasible de ninguna objeción lógica; sin embargo, la independencia permite una deducción más simple de los teoremas.
- **Consistencia:** este requisito supone que un enunciado y su negación no pueden ser probados simultáneamente dentro del sistema. Es decir, si dentro de un sistema se puede probar el enunciado "A" y su negación, "no A", el sistema será inconsistente. Como vimos, el enunciado que afirma "A y no A" es un enunciado contradictorio, siempre falso. Este requisito sí es necesario, pues hay la pretensión de que el sistema no incluya falsedades.
- **Completitud:** es una noción compleja, en particular, porque existen varias nociones de completitud. Aquí solo esbozaremos uno de los sentidos: diremos que un sistema axiomático es completo cuando permite demostrar todo lo que se pretende demostrar a la hora de construir el sistema, es decir, cuando hay garantía de que ninguna verdad quedará fuera del sistema. Como vimos, el sistema de Euclides intentó sistematizar todas las verdades conocidas pero, en sentido estricto, no lo logró, pues muchas de las demostraciones contenían lagunas o huecos. Fue David Hilbert, en su *Fundamentación de la Geometría*, quién habría de subsanar esta situación.