4. DIFERENCIABILIDAD

Definiciones:

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $\vec{a} = (a_1, a_2) \in A$

- Se define la derivada parcial de f con respecto a x en $\vec{a}$ como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} \text{ si existe y es un número real.}$$

- Se define la derivada parcial de f con respecto a y en $\vec{a}$ como:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h} \text{ si existe y es un número real.}$$

- Si $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$ y $\exists\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$ se define el verctor gradiente a f en $\vec{a}$ como:
  $\nabla f(a_1, a_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2), \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \right)$

- Si $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$ y $\exists\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$ se define:
  - $Gráfico(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\}$
  - Plano tangente al $Gráfico(f)$ en $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$:
    $z = f(a_1, a_2) + \Big\langle \nabla f(a_1, a_2)(x - a_1, y - a_2) \Big\rangle$

Diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$:

Sea $f : B \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $\vec{a} \in B$ tal que existen $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})$; sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la transformación lineal asociada a la matriz $A = \nabla f(\vec{a})$ definida por $T(x, y) = (x\ y) \cdot A^T = \Big\langle (x, y); \nabla f(\vec{a}) \Big\rangle = x\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}) + y\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})$.

Decimos que f es diferenciable en $\vec{a}$ si:

$$\lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})h_2}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$

Es este caso, T se llama la <u>diferencial</u> de f en $\vec{a}$ y se la nota: $T = Df(\vec{a})$.

Diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$:

Sea $f : B \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y sea $\vec{a} \in B$ tal que $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), ..., f_m(\vec{x}))$ con $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y tal que existen $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{a})\ \forall\ 1 \leq j \leq m\ ;\ 1 \leq i \leq n$; sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la transf. lineal asociada a la matriz: $A = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$

ie, $T(x_1,...,x_n) =$

$$(x_1,...,x_n)(\nabla f_1(\vec{a}),...,\nabla f_m(\vec{a})) = (x_1,...,x_n)\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

Decimos que f es diferenciable en $\vec{a}$ si:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{a}+\vec{h}) - f(\vec{a}) - T(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

Es este caso, T se llama la <u>diferencial</u> de f en $\vec{a}$ y se la nota: $T = Df(\vec{a})$.

<u>Proposición:</u>
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; $\vec{a} \in A$ entonces:

$$f \text{ diferenciable en } \vec{a} \Longrightarrow f \text{ continua en } \vec{a}$$

<u>Definición:</u>
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$; $f = (f_1,...,f_m)$. f se dice de <u>clase C^1</u> (notamos $f \in C^1$) si se satisfacen:

1. $\exists\ \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x})\ \forall\ 1 \leq j \leq m,\ \forall\ 1 \leq i \leq n,\ \forall\ \vec{x} \in A.$
2. Las funciones $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas $\forall\ 1 \leq j \leq m, \forall\ 1 \leq i \leq n.$

<u>Proposición:</u>
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{a} \in A$:

$$f \in C^1 \text{ (en } \vec{a}) \Longrightarrow f \text{ es diferenciable (en } \vec{a}).$$

<u>Regla de la cadena:</u>
Sean:

$$\left.\begin{array}{l} f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ g : B \subseteq \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \text{ tales que } g(B) \subseteq A$$

Sea $h = f \circ g : B \subseteq \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$g(x_1,\ldots,x_p) = \Big(u_1(x_1,\ldots,x_p),\ldots,u_n(x_1,\ldots,x_p)\Big)$$
$$h(x_1,\ldots,x_p) = f \circ g(x_1,\ldots,x_p) = f\Big(g(x_1,\ldots,x_p)\Big)$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_{1(\ldots n)}}(x_1,\ldots,x_p) = \frac{\partial f}{\partial u_1}\Big(g(x_1,\ldots,x_p)\Big)\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_{1(\ldots n)}}(x_1,\ldots,x_p) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\Big(g(x_1,\ldots,x_p)\Big)\cdot\frac{\partial u_n}{\partial x_{1(\ldots n)}}(x_1,\ldots,x_p) \quad (1 \leq i \leq m)$$

Curvas en $\mathbb{R}^n$:
Una curva en $\mathbb{R}^n$ es la imagen de una función continua $C : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, se verifica que:

- La curva se dice diferenciable si la función C es diferenciable.
- Si C es diferenciable en $t = t_0$, entonces:
  - $C(t) = \Big(C_1(t), \ldots, C_n(t)\Big)$ con $C_i : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  - C diferenciable en $t = t_0 \Longrightarrow$ cada C_i es diferenciable en $t = t_0$, ie, $\exists\ C_i'(t_0)\ \forall\ 1 \leq i\ \ \leq n$
  - Se define el vector tangente a la curva en $t = t_0$ como el vector $\vec{v} = \Big(C_1'(t_0), \ldots, C_n'(t_0)\Big) = \lim_{h \to 0} \dfrac{C(t_0 + h) - C(t_0)}{h}$

Proposición:
Sea $C : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable, y sea $f : B \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con $C\Big((a,b)\Big) \subseteq B$, diferenciable en t_0 con $t_0 \in (a,b)$, entonces:
$f \circ C : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en t_0 y además

$$(f \circ C)'(t_0) = \Big\langle \nabla f\Big(C(t_0)\Big); C_1'(t_0), \ldots, C_n'(t_0)\Big\rangle$$

Derivada direccional:
$A \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto; $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\vec{v}\| = 1$; se define la derivada direccional de f en $\vec{a} = (a_1, a_2) \in A$ en la dirección $\vec{v}$ como:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + hv_1, a_2 + hv_2) - f(a_1, a_2)}{h} \text{ si existe y es un número real.}$$

Proposición:
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto; $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; $\vec{a} \in A$,

$$f \text{ diferenciable en } \vec{a} \Longrightarrow \exists\ \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a})\ \forall\ \vec{v} \in \mathbb{R}^n;\ \|\vec{v}\| = 1$$

Además:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = \Big\langle \nabla f(\vec{a}); \vec{v}\Big\rangle = Df(\vec{a})(\vec{v})$$

Proposición:
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto; $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; diferenciable en $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ y tal que $\nabla f(\vec{a}) \neq \vec{0}$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) \leq \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|}\right)}\ \forall\ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \|\vec{v}\| = 1$$

(ie, f cambia más rapidamente partiendo de $\vec{a}$ en $\frac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|}$)

Definición:
Dada $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$; sea $k \in \mathbb{R} \in Im(f) \in \mathbb{R}$.
Se define la superficie de nivel de f correspondiente a k como:

$$S = f^{-1}(k) = \Big\{\vec{a} \in A : f(\vec{a}) = k\Big\}$$

Proposición:
$f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R};\ k \in \mathbb{R};\ S = f^{-1}(k)$
$\nabla f(\vec{a})$ es normal a la superficie de nivel S y tangente (perpendicular) a cualquier curva sobre S que pase por $\vec{a}$.

Definiciones:
$f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable; $S = f^{-1}(k) \subseteq A$; $k \in Im(f)$; $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in S$ tal que $\nabla f(a_1, a_2, a_3) \neq 0$, entonces definimos:

1. Plano tangente a la superficie de nivel S en $\vec{a}$ como el de ecuación:
   $\Big\langle \nabla f(\vec{a}); (x - a_1, y - a_2, z - a_3)\Big\rangle = 0$
2. Recta normal a S en $\vec{a}$ como la de ecuación: $X = \vec{a} + t\nabla f(\vec{a})$

Teorema del valor medio en $\mathbb{R}$ (Lagrange):

Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable en $(a, b) \implies \exists\ c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Teorema del valor medio en $\mathbb{R}^n$:

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto; $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.
Dados $\vec{a}$ y $\vec{b} \in A; S_{\vec{a}\vec{b}} = \Big\{\vec{z} \in \mathbb{R}^n : \vec{z} = t\vec{b} + (1 - t)\vec{a};\ 0 \leq t \leq 1\Big\} \subseteq A$ (ie, $\vec{z}$ pertenece al segmento que une a $\vec{a}$ con $\vec{b}$), entonces:

$\exists\ t_0 \in (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ tal que si $\vec{z_0} = t_0\vec{b} + (1 - t_0)\vec{a};\ \vec{z_0} \in A$ resulta que:

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \Big\langle \nabla f(\vec{z_0}); \vec{b} - \vec{a}\Big\rangle = Df(\vec{z_0})(\vec{b} - \vec{a}) = \|\vec{b} - \vec{a}\| \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\vec{b} - \vec{a}}{\|\vec{b} - \vec{a}\|}\right)}(\vec{z_0})$$

Teorema de la función inversa:

$f : A \ abierto \ \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1; $\vec{a} \in A$, tal que $det\Big((Df(\vec{a}))\Big) \neq 0 \Longrightarrow$ existen $V \subseteq A$ y $W \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos tales que:

- $\vec{a} \in V$
- $f(\vec{a}) \in W$ y $f : V \longrightarrow W$ es biyectiva (ie, $\exists \ f^{-1} : W \longrightarrow V$)
- $f^{-1} : W \longrightarrow V$ es de clase C^1 y $\Big(Df^{-1}(\vec{y})\Big) = \Big(Df(f^{-1}(\vec{y}))\Big)^{-1} \ \forall \ \vec{y} \in W$

Todos simultáneamente, garantizando la existencia de inversa local de f.

Teorema de la función implícita:

Sea $F : A \ abierto \ \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1; $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in A$ tal que: $F(\vec{a}) = 0 \ y \ \dfrac{\partial F}{\partial z}(\vec{a}) \neq 0 \Longrightarrow$ existen $V \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $W \subseteq \mathbb{R}$ abierto tal que $(a_1, a_2) \in V$ y $a_3 \in W$ con $V \times W \subseteq A$, existe una única $f : V \longrightarrow W$ de clase C^1 tal que:

i) $f(a_1, a_2) = a_3$

ii) $F(x, y, f(x, y) = z) = 0 \ \forall \ (x, y) \in V$

Además:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(a_1, a_2, a_3)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a_1, a_2, a_3)} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(a_1, a_2, a_3)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a_1, a_2, a_3)}$$