2do Parcial

Algoritmos y Estructuras de Datos 3 – DC, FCEyN, UBA

30/11/2020

El examen se aprueba con al menos 2 ejercicios perfectos o con al menos 1 perfecto y 2 bien (posiblemente con errores menores).

1) A Carle le gusta mucho saltar la soga. Le gusta tanto que hasta diseñó un juego especial en el que tiene la oportunidad de saltar varias sogas porque hay varias personas dando la soga al mismo tiempo y puede ir pasándose de una a otra. Este juego se volvió muy popular y P personas que disfrutan ver cómo Carle salta la soga se ofrecieron para dar la soga.

   Con la llegada del verano, P_O de esas P personas tienen como requisito estar en la sombra por la radiación y las otras $P_S = P - P_O$ tienen como requisito poder tomar sol. Por cómo es el espacio físico donde Carle va a jugar el juego, una persona que requiere estar al sol sólo puede dar la soga con una persona que requiere estar en la sombra y una persona que requiere estar en la sombra sólo puede dar la soga con una persona que requiere estar al sol.

   Carle también disfruta trabajar sobre teoría de cuerdas y teoría de nudos e introdujo los conceptos de:

   - soga atómica, que es una soga indivisible;
   - soga compuesta, que es
     - la unión de 2 sogas atómicas unidas por un nudo hecho con un extremo de cada una;
     - o la unión de una soga compuesta y una soga atómica unidas por un nudo hecho con un extremo de cada una;
   - soga final, que es una soga compuesta que es sujetada por dos personas, una en cada extremo de la soga.

Si bien el color favorito de Carle es el verde, le gustan mucho todos los colores. Por eso, Carle le da a cada persona p exactamente una soga atómica monocromática, que es de un color c_p, y esa es la única soga atómica con la que va a estar en contacto directo esa persona. A su vez, Carle necesita que en las sogas finales que salte, cada par de sogas atómicas unidas por un nudo (sogas consecutivas) compartan el color en el punto de contacto. Como esto se contrapone con el objetivo de tener muchas sogas finales para saltar, Carle buscó información para comprar más sogas atómicas y encontró un negocio que vende sogas atómicas bicolores con determinadas combinaciones, donde cada una tiene una mitad de un color y la otra mitad de otro. Afortunadamente, esta gran compañía puede venderle tantas sogas como necesite. ¿Podés ayudar a Carle a cumplir su sueño de saltar tantas sogas finales como sea posible?

a) Diseñar un algoritmo eficiente basado en grafos que resuelva el problema.

b) Mostrar que el algoritmo propuesto es correcto, justificando claramente en base a las afirmaciones del enunciado, y determinar su complejidad.

2) Ovi disfruta mucho pensar problemas de Compu, tanto que se queda hasta las 3 a.m. haciendo eso. Lamentablemente, con tanto cansancio no se le ocurren algunas demostraciones, ¿podés contárselas?

Dado un grafo G, se define el grafo línea $L(G)$ como el grafo que tiene un vértice por cada arista de G, y dos vértices de $L(G)$ son adyacentes si y solo si las aristas correspondientes a esos vértices son incidentes a un mismo vértice en G.

a) Probar que $\chi'(G) = \chi(L(G))$.

b) Demostrar que $\chi'(G) * \nu(G) \geq |E_G|$, con $\nu(G)$ el tamaño de una correspondencia máxima de G.

c) Usando los incisos anteriores, hallar una cota inferior para el número cromático de un grafo línea $L(G)$.

3) En este ejercicio, una clique de un grafo G es un conjunto de nodos K que induce un subgrafo completo de G mientras que una biclique B es un conjunto que induce un subgrafo bipartito completo de G. Recordar que $G + H$ es el grafo que se obtiene agregando todas las aristas entre $V(G)$ y $V(H)$ en $G \cup H$.

a) Demostrar que G tiene una clique de tamaño k si y sólo si $\overline{G}+\overline{G}$ tiene una biclique de tamaño $2k$.

b) Dados G y k, el problema BICLIQUE consiste en determinar si G tiene una biclique de tamaño k. Demostrar que BICLIQUE es NP-completo. Sugerencia: aprovechar que CLIQUE es NP-completo.

4) En este ejercicio, decimos que un grafo M es un *matching* cuando $E(M)$ es un *matching*. Sea G un grafo conexo.

a) Demostrar que existe un grafo *matching* M con los mismos vértices que G tal que $(V(G), E(G) \cup E(M))$ es un multigrafo euleriano.

b) Sea M el grafo *matching* con menor cantidad de aristas que satisface *a*). Demostrar que si G es un subgrafo generador de un multigrafo euleriano $(V(G), E(G) \cup X)$, entonces $|M| \leq |X|$.

c) Usando los incisos anteriores, dar un algoritmo lineal para determinar el mínimo conjunto de aristas que se deben agregar a un grafo G para obtener un multigrafo euleriano.

d) Demostrar que la condición de multigrafo es esencial en el inciso *a*) exhibiendo una familia infinita de grafos tal que para cada grafo G en ella, $(V(G), E(G) \cup X)$ no sea euleriano para ningún X.