| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| Calif. |
|---|
| |

Apellido y Nombre: Mail:
Libreta: Turno: 10 a 13 16 a 19 **TEMA 1**

**Algebra Lineal - 1er Cuatrimestre 2014**
**2do Parcial (08/07/2014)**

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Sea $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por $f(X) = A.X - X^t.A^t$. Probar que $f$ es diagonalizable y hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ para la cual $[f]_{\mathcal{B}}$ es diagonal.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz de rango 1.
   (a) Probar que el polinomio característico de $A$ es $\mathcal{X}_A = (\lambda - \operatorname{tr}(A))\lambda^{n-1}$, y deducir que $\det(\operatorname{Id}_n - A) = 1 - \operatorname{tr}(A)$.
   (b) Determinar todas las formas de Jordan posibles de $A$ según el valor de $\operatorname{tr}(A)$.

3. Se considera $\mathbb{C}^{m\times n}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^*)$.
   (a) Sea $A = U\Sigma V^* \in \mathbb{C}^{m\times n}$ la descomposición en valores singulares de $A$, con valores singulares no nulos $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$. Probar que $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2$.
   (b) Para $1 \leq k \leq r$, sea $\Sigma_k$ la matriz diagonal igual a $\Sigma$ pero donde se reemplazaron $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_r$ por 0, y sea $A_k = U\Sigma_k V^*$. Probar que $\operatorname{rg}(A_k) = k$ y que $\operatorname{dist}(A, A_k) = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \cdots + \sigma_r^2}$.
   (Comentario: $A_k$ es la matriz de rango menor o igual a $k$ que está a distancia mínima de $A$.)

4. (a) Determinar, en alguna base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, una (la) simetría $f$ en $\mathbb{R}^3$ que satisface $f(1,1,0) = (0,-1,-1)$.
   (b) Probar que si $g$ es una rotación en $\mathbb{R}^3$ cuyo eje es el subespacio generado por $(1,0,-1)$, entonces $f \circ g$ es una simetría en $\mathbb{R}^3$.

5. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con minimal $m_A = (\lambda+1)^r\lambda$, para algún $r \leq n$. Probar que $A^2$ es semejante a $-A$.

Justificar todas las respuestas