ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS III - $1^{\underline{\text{er}}}$ Recuperatorio
Fecha examen: 12-DIC-2014 / Fecha notas: a determinar

	Nº Orden	Apellido y nombre	L.U.	Cant. hojas[1]
Completar:				
	Nota (Nº)	Nota (Letras)	Docente	
No completar:				

1. Sea $v = (v_1, v_2, \dots v_n)$ un vector de números reales. Para cada par de enteros p y q tales que $1 \leq p \leq q \leq n$, definimos $\text{suma}(v, p, q) = \sum_{p \leq i \leq q} v_i$. Diseñar un algoritmo que dado el vector v, lo preprocese adecuadamente de manera tal que luego pueda calcularse $\text{suma}(v, p, q)$ en $O(1)$ para cualquier par de enteros p y q válidos. El algoritmo debe tener complejidad temporal y espacial estrictamente mejor que $\Theta(n^2)$. Mostrar que el algoritmo propuesto es correcto y determinar su complejidad (temporal y espacial). Justificar. El mejor algoritmo que conocemos tiene complejidad temporal y espacial $O(n)$, la cual es necesaria para obtener puntaje máximo en este ejercicio. 2 p.

2. Diseñar un algoritmo eficiente que dado un grafo $G = (V, E)$, decida si existen subconjuntos V_1 y V_2 de V tales que 2 p.
   - $V_1 \cup V_2 = V$;
   - $V_1 \cap V_2 = \emptyset$;
   - $V_i \neq \emptyset$ para $i \in \{1, 2\}$; y
   - el subgrafo inducido por V_i es completo para $i \in \{1, 2\}$.

   Mostrar que el algoritmo propuesto es correcto y determinar su complejidad. Justificar. El mejor algoritmo que conocemos tiene complejidad $O(n^2)$, donde $n = |V|$.

3. Sea G un grafo de n vértices.
   (a) Demostrar que G puede obtenerse a partir del grafo trivial repitiendo $n - 1$ veces el siguiente paso: agregar un vértice y cierta cantidad de ejes (eventualmente ninguno) incidentes al vértice agregado. 1 p.
   (b) Demostrar que si G es un árbol, lo dicho puede lograrse aún exigiendo que al final de cada paso se obtenga un árbol. 1 p.

   SUGERENCIA: Inducción en n.

4. Sea G un grafo o digrafo en el cual cada eje e tiene asociada una longitud no necesariamente positiva $\ell(e) \in \mathbb{R}$. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definimos G_f como el grafo que tiene los mismos vértices y ejes que G, pero en el cual cada eje e tiene asociada la longitud $f(\ell(e))$ en vez de $\ell(e)$. Sea C un camino desde el vértice v hasta el vértice w en G, el cual por definición también existe en G_f, y cuya longitud total en cada grafo es la suma de las longitudes asociadas a sus ejes en ese grafo. ¿Es cierto que...
   (a) para $f(x) = x + b$, C es un camino *mínimo* en G si y sólo si C es un camino *mínimo* en G_f? 0.5 p.
   (b) para $f(x) = ax$ con $a < 0$, C es un camino *mínimo* en G si y sólo si C es un camino *máximo* en G_f? 0.5 p.
   (c) para $f(x) = ax$ con $a > 0$, C es un camino *mínimo* en G si y sólo si C es un camino *mínimo* en G_f? 0.5 p.
   (d) para $f(x) = ax$ con $a > 0$, C es un camino *máximo* en G si y sólo si C es un camino *máximo* en G_f? 0.5 p.

   En caso afirmativo demostrar; en caso negativo dar un contraejemplo y justificar.

5. Dado un grafo H con pesos asociados a sus ejes, un árbol generador quasi-mínimo de H es un árbol generador de H que tiene peso mínimo entre los árboles generadores de H que no son mínimos.

   Sea G un grafo conexo de n vértices y m ejes, con $m \geq n$. Cada eje tiene un peso asociado, y los pesos son todos distintos entre sí.
   (a) ¿Es cierto que G tiene *al menos* un árbol generador quasi-mínimo? En caso afirmativo demostrar; en caso negativo dar un contraejemplo y justificar. 0.3 p.
   (b) ¿Es cierto que G tiene *a lo sumo* un árbol generador quasi-mínimo? En caso afirmativo demostrar; en caso negativo dar un contraejemplo y justificar. 0.3 p.
   (c) Demostrar que si T_1 es un árbol generador mínimo de G, y T_2 es un árbol generador quasi-mínimo de G, entonces T_1 tiene exactamente un eje que no está en T_2, y viceversa. 0.8 p.
   SUGERENCIA: Considerar el eje de menor peso en la diferencia simétrica entre $E(T_1)$ y $E(T_2)$.
   (d) Repetir los dos primeros puntos sin la restricción $m \geq n$. 0.3 p.
   (e) Repetir los dos primeros puntos sin la restricción de que los pesos son todos distintos entre sí. 0.3 p.

[1] Incluyendo a esta hoja. Entregar esta hoja junto al examen.