Clase práctica 2 (lógica)
Lógica y Computabilidad

Florencia Savoretti

17 de Febrero de 2009

Ejercicio 1. Demostrar que el conjunto C es el conjunto de los teoremas

$$C = \bigcap_{i=0}^{\infty} \Gamma_i \text{ , donde } \Gamma_i \text{ son todos los conjuntos maximales consistentes}$$

Demostración. Sea $\varphi \in C \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{por def. } C} \varphi \in \Gamma_i \; \forall \Gamma_i$

- φ es teorema $\Leftrightarrow \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma_i \vdash \varphi \; \forall \Gamma_i \underbrace{\Rightarrow}_{\Gamma_i \text{ es maximal}} \varphi \in \Gamma_i$
- φ no es teorema. Tenemos 2 casos:
  - φ es una contradicción. $\Rightarrow \varphi \notin \Gamma_i \; \forall \Gamma_i \Rightarrow \varphi \notin C$.
  - φ es una contingencia. $\Rightarrow \{\neg\varphi\}$ es un conjunto consistente. Luego, se puede extender a un conjunto Γ_j maximal consistente (por el Lema de Lindembaun) talque $\{\neg\varphi\} \subseteq \Gamma_j$.

  Como $\neg\varphi \in \Gamma_j$ y además Γ_j es consistente $\Rightarrow \varphi \notin \Gamma_j \Rightarrow \varphi \notin C$.

Entonces, C es el conjunto de todos los teoremas.

□

Ejercicio 2. Demostrar que si una fórmula φ es tal que todas sus variables proposicionales aparecen una única vez, entonces φ es una contingencia

Demostración. Lo vamos a hacer por inducción en la estructura de la fórmula.

Caso Proposicional. $\varphi = p$

Sea $v \in \mathbf{Val}/v(p) = 0$. Sea $w \in \mathbf{Val}/w(p) = 1$

- $v(\varphi) = v(p) = 0$
- $w(\varphi) = w(p) = 1$

Luego, φ es una contingencia.

Negación. $\varphi = \neg\psi$

Por H.I. $\exists v, w \in \mathbf{Val}/v(\psi) = 0, w(\psi) = 1$

- $v(\varphi) = v(\neg\psi) = 1 - v(\psi) = 1 - 0 = 1$
- $w(\varphi) = w(\neg\psi) = 1 - w(\psi) = 1 - 1 = 0$

Luego, φ es una contingencia.

Implicación.$\varphi = \alpha \to \beta$ **en donde** $\mathbf{Var}(\alpha) \cap \mathbf{Var}(\beta) = \emptyset$

Por H.I. $\exists v', w' \in \mathbf{Val}/v'(\alpha) = 0, w'(\alpha) = 1$ y $\exists \hat{v}, \hat{w} \in \mathbf{Val}/\hat{v}(\beta) = 0, \hat{w}(\beta) = 1$

Como en $\varphi \mathbf{Var}(\alpha) \cap \mathbf{Var}(\beta) = \emptyset$ puedo definir:

$$v(p) = \begin{cases} v'(p) & \text{si } p \in \mathbf{Var}(\alpha) \\ \hat{v}(p) & \text{sino} \end{cases}$$

$$w(p) = \begin{cases} w'(p) & \text{si } p \in \mathbf{Var}(\alpha) \\ \hat{v}(p) & \text{sino} \end{cases}$$

Luego,

- $v(\varphi) = v(\alpha \to \beta) = 1$
- $w(\varphi) = w(\alpha \to \beta) = 0$

Luego, φ es una contingencia.

□

Ejercicio 3. Demostar que $C = \{\wedge\}$ no es un conjunto adecuado

Demostración. Sea $v \in \mathbf{Val}/v(p) = 1 \forall p \in \mathbf{Var}$

Veamos por inducción que sólo con el operador $\wedge$, $v(\varphi) = 1 \forall \varphi \in \mathbf{Form}$.

Caso Proposicional.$\varphi = p$

Luego, $v(\varphi) = v(p) \forall v \in \mathbf{Val}$

Caso AND.$\varphi = \alpha \wedge \beta$

$v(\varphi) = v(\alpha \wedge \beta) = \text{mín}(v(\alpha), v(\beta)) \underbrace{=}_{xH.I.} \text{mín}(1, 1) = 1$

Luego, $v(\varphi) = 1 \forall \varphi$ con este único conectivo. $\Rightarrow$ No puedo generar la fórmula False por ejemplo $\Rightarrow \{\wedge\}$ no es adecuado.

□

Ejercicio 4. Demostrar que $C = \{M(a, b, c),\ \bot\}$ es adecuado, donde M es el operador de minoría definido como:

$$v(M(a_1, a_2, a_3)) = \begin{cases} 1 & \text{si existe} i, j \text{tal que} 1 <= i < j <= 3, v(a_i) = v(a_j) = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Se puede formar la fórmula $\neg p_1$ con $M(p_1, p_1, p_1)$

p_1	$\overbrace{M(p_1, p_1, p_1)}^{\neg p_1}$
0	1
1	0

Se puede formar la fórmula $p_1 \wedge p_2$ con $\neg M(p_1, p_2, \text{False})$

p_1	p_2	$M(p_1, p_2, \bot)$	$\overbrace{\neg M(p_1, p_2, \bot)}^{p_1 \wedge p_2}$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Luego, pudimos escribir los conectivos $\{neg, \wedge\}$ que son un conjunto adecuado $ent C$ es adecuado.

□

Ejercicio 5. Siendo Γ un conjunto Maximal Consistente. Se define $\bar{\Gamma} = \{\neg\varphi | \varphi \in \Gamma\}$
Decidir y demostrar:

a) $\bar{\Gamma}$ es consistente.

b) $\bar{\Gamma} - \{\varphi | \varphi$ es contradicción$\}$ es consistente

a) Sea ψ un teorema $\Leftrightarrow \vdash \psi \Leftrightarrow \Delta \vdash \psi\ \forall \Delta$
En particular: $\Gamma \vdash \psi$ y $\bar{\Gamma} \vdash \psi$

- $\Gamma \vdash \psi \underbrace{\Rightarrow}_{como \Gamma \nvdash \neg\psi} \psi \in \Gamma \underbrace{\Rightarrow}_{x def.} \neg\psi \in \bar{\Gamma} \Rightarrow \bar{\Gamma} \vdash \neg\psi$
- $\bar{\Gamma} \vdash \psi$

Luego, $\bar{\Gamma}$ es inconsistente.

b) Sea $\Delta = \{p, q, (p \vee \neg q)\}$ es consistente. Extendemos Δ a un Γ maximal consistente (x Lema de Lindembaun)
Entonces,

- $\neg p \in \bar{\Gamma}$
- $\neg q \in \bar{\Gamma}$
- $\neg(p \vee \neg q) \in \bar{\Gamma} \Rightarrow \bar{\Gamma} \vdash (\neg p \wedge q) \Rightarrow \bar{\Gamma} \vdash \neg p$ y $\bar{\Gamma} \vdash q$

Entonces,

- $\bar{\Gamma} \vdash q$
- $\bar{\Gamma} \vdash \neg q$

Luego, $\bar{\Gamma} - \{contradicciones\}$ es inconsistente.