

FINAL DE ÁLGEBRA I

(25-10-22)

N. I.
(nibanez123@gmail.com)

“...hacia donde el crepúsculo corre borrando estatuas.”
Pablo Neruda

Ejercicio 1

Sea $X = \{1, 2, \dots, 13\}$. En $P(X)$ se define la relación:

$$A \mathfrak{R} B \iff \text{existen } a \in A \text{ y } b \in B \text{ tales que } a \mid b.$$

- (a) Decidir si la relación \mathfrak{R} es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.
- (b) ¿Cuántos conjuntos $B \in P(X)$ satisfacen que $\{2, 3\} \mathfrak{R} B$?

Resolución:

- (a) • \mathfrak{R} no reflexiva: si $A = \emptyset$ entonces $A \not\mathfrak{R} A$, pues no existen $a, b \in A$ tales que $a \mid b$, ya que en A no hay ningún elemento.
- \mathfrak{R} no simétrica: si $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$ se tiene que $A \mathfrak{R} B$ pues $1 \mid 2$, pero $B \not\mathfrak{R} A$ pues $2 \nmid 1$.
- \mathfrak{R} no antisimétrica: si $A = \{1, 4\}$ y $B = \{2\}$ se tiene que $A \mathfrak{R} B$ pues $1 \mid 2$ y $B \mathfrak{R} A$ pues $2 \mid 4$, pero $A \neq B$.
- \mathfrak{R} no transitiva: si $A = \{2\}$, $B = \{2, 3\}$ y $C = \{3\}$ se tiene que $A \mathfrak{R} B$ pues $2 \mid 2$ y $B \mathfrak{R} C$ pues $3 \mid 3$, pero $A \not\mathfrak{R} C$ pues $2 \nmid 3$.

(b) Notar que

$$\{2, 3\} \mathfrak{R} B \iff \text{existe } b \in B \text{ tal que } 2 \mid b \text{ o } 3 \mid b.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \{2, 3\} \mathfrak{K} B &\iff \text{para todo } b \in B, 2 \nmid b \text{ y } 3 \nmid b \\ &\iff B \subseteq \{1, 5, 7, 11, 13\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la cantidad de conjuntos $B \in P(X)$ tales que $\{2, 3\} \mathfrak{R} B$ es $2^{13} - 2^5 = 8192 - 32 = 8160$.

■

Ejercicio 2

Para $n \in \mathbb{N}$, sean

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad b_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n \leq 3a_n.$$

Resolución:

Usamos inducción. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, la afirmación dada por

$$P(n) : b_n \leq 3a_n.$$

Veamos que vale $P(n) \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 1$ resulta $b_1 = 1 \leq 3 = 3 \cdot 1 = 3a_1$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos verdadera $P(n)$ y veamos que lo es $P(n+1)$. La afirmación $P(n+1)$ es verdadera si y sólo si $\sum_{k=1}^{(n+1)^2} \frac{1}{k} \leq 3 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

Tenemos que

$$\sum_{k=1}^{(n+1)^2} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \frac{1}{k} \leq 3 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \frac{1}{k}$$

por H. I., y por lo tanto basta ver que

$$\sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \frac{1}{k} \leq 3 \frac{1}{n+1}$$

, pues $3 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 3 \frac{1}{n+1} = 3a_{n+1}$.

En $\sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \frac{1}{k}$ tenemos $2n+1$ términos, cada uno de ellos menor o igual al primero, es decir, a $\frac{1}{n^2+1}$. Entonces,

$$\sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \frac{1}{k} \leq (2n+1) \frac{1}{n^2+1} = \frac{2n+1}{n^2+1}.$$

Luego,

$$\frac{2n+1}{n^2+1} \leq 3 \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow 2n^2 + 3n + 1 \leq 3n^2 + 3 \Leftrightarrow 3n \leq n^2 + 2,$$

que vale para todo $n \geq 2$.

Resta ver entonces el caso $n = 1$. Tenemos que

$$\sum_{k=1^2+1}^{(1+1)^2} \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^4 \frac{1}{k} = \frac{13}{12} \leq \frac{3}{2} = 3 \frac{1}{1+1}.$$

Probados el caso base y el paso inductivo, se concluye que $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

■

Ejercicio 3

Hallar todos los pares $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que $(a : b) = 1$ y

$$\frac{a}{b} + \frac{6b}{7} + \frac{7}{a} \in \mathbb{Z}.$$

Resolución:

Tenemos que

$$\frac{a}{b} + \frac{6b}{7} + \frac{7}{a} \in \mathbb{Z} \iff 7ab \mid 7a^2 + 6ab^2 + 49b.$$

Luego, si $7ab \mid 7a^2 + 6ab^2 + 49b$ entonces $7 \mid 7a^2 + 6ab^2 + 49b$, $a \mid 7a^2 + 6ab^2 + 49b$ y $b \mid 7a^2 + 6ab^2 + 49b$.

En primer lugar,

$$7 \mid 7a^2 + 6ab^2 + 49b \iff 7 \mid 6ab^2 \iff 7 \mid ab^2 \iff 7 \mid a \text{ o } 7 \mid b,$$

donde la primer equivalencia vale pues $7 \mid 7a^2 + 49b$, la segunda pues $(6 : 7) = 1$ y la tercera pues 7 es primo.

En segundo lugar,

$$a \mid 7a^2 + 6ab^2 + 49b \iff a \mid 49b \iff a \mid 49,$$

donde la primer equivalencia vale pues $a \mid 7a^2 + 6ab^2$ y la segunda pues $(a : b) = 1$.

En tercer lugar,

$$b \mid 7a^2 + 6ab^2 + 49b \iff b \mid 7a^2 \iff b \mid 7,$$

donde la primer equivalencia vale pues $b \mid 6ab^2 + 49b$ y la segunda pues $(a : b) = 1$.

Entonces, $7ab \mid 7a^2 + 6ab^2 + 49b$ implica $7 \mid a$ o $7 \mid b$, $a \mid 49$ y $b \mid 7$, y por lo tanto tenemos que hallar todos los pares $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $(a : b) = 1$ para los cuales valen esas tres condiciones (y después probar si para cada uno de ellos resulta $7ab \mid 7a^2 + 6ab^2 + 49b$, pues las tres condiciones son necesarias, pero no sabemos si suficientes, pues las obtuvimos a partir de una implicación y no de una equivalencia).

Los pares $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $(a : b) = 1$ tales que $7 \mid a$, $a \mid 49$ y $b \mid 7$ son $(7, 1)$ y $(49, 1)$.

El único par $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $(a : b) = 1$ tal que $7 \mid b$, $a \mid 49$ y $b \mid 7$ es $(1, 7)$.

Luego:

- $(a, b) = (7, 1)$:

$$7ab \mid 7a^2 + 6ab^2 + 49b \iff 49 \mid 434,$$

que no vale.

- $(a, b) = (49, 1)$:

$$7ab \mid 7a^2 + 6ab^2 + 49b \iff 343 \mid 17150,$$

que vale.

- $(a, b) = (1, 7)$:

$$7ab \mid 7a^2 + 6ab^2 + 49b \iff 49 \mid 644,$$

que no vale.

Concluimos entonces que el único par $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $(a : b) = 1$ tal que $7ab \mid 7a^2 + 6ab^2 + 49b$ es $(49, 1)$.

■

Ejercicio 4

Hallar el resto en la división por 55 del número

$$\sum_{k=1}^{1000} k^{20}.$$

Resolución:

Sea $S = \sum_{k=1}^{1000} k^{20}$. Como $(5 : 11) = 1$, resulta

$$S \equiv r \pmod{55} \iff S \equiv r \pmod{5} \text{ y } S \equiv r \pmod{11}$$

$$\iff r_5(S) \equiv r \pmod{5} \text{ y } r_{11}(S) \equiv r \pmod{11},$$

donde $r = r_{55}(S)$.

Calculamos $r_5(S)$. Tenemos que

$$S = \sum_{j=0}^4 \sum_{\substack{k=1 \\ r_5(k)=j}}^{1000} k^{20} \equiv \sum_{j=0}^4 \sum_{\substack{k=1 \\ r_5(k)=j}}^{1000} j^{20} \pmod{5}.$$

Luego,

$$\sum_{j=0}^4 \sum_{\substack{k=1 \\ r_5(k)=j}}^{1000} j^{20} = \sum_{j=1}^4 \sum_{\substack{k=1 \\ r_5(k)=j}}^{1000} j^{20} = \sum_{j=1}^4 199 \cdot j^{20} = 199 \sum_{j=1}^4 j^{20}$$

pues, para cada $1 \leq j \leq 4$, hay 200 números entre 1 y 1000 con resto j en la división por 5, que son los de la forma $5k + j$ con $0 \leq k \leq 199$. Entonces,

$$S \equiv 200 \sum_{j=1}^4 j^{20} \equiv 0 \pmod{5}$$

por el P. T. F.

Ahora calculamos $r_{11}(S)$, procediendo como antes. Tenemos que

$$S = \sum_{j=0}^{10} \sum_{\substack{k=1 \\ r_{11}(k)=j}}^{1000} k^{20} \equiv \sum_{j=0}^{10} \sum_{\substack{k=1 \\ r_{11}(k)=j}}^{1000} j^{20} \pmod{11}.$$

Luego,

$$\sum_{j=0}^{10} \sum_{\substack{k=1 \\ r_{11}(k)=j}}^{1000} j^{20} = \sum_{j=1}^{10} \sum_{\substack{k=1 \\ r_{11}(k)=j}}^{1000} j^{20} = \sum_{j=1}^{10} 91 \cdot j^{20} = 91 \sum_{j=1}^{10} j^{20}$$

pues, para cada $1 \leq j \leq 10$, hay 91 números entre 1 y 1000 con resto j en la división por 11, que son los de la forma $11k + j$ con $0 \leq k \leq 90$. Entonces,

$$S \equiv 91 \sum_{j=1}^{10} j^{20} \equiv 3 \sum_{j=1}^{10} j^{r_{10}(20)} \equiv 3 \sum_{j=1}^{10} j^0 \equiv 3 \cdot 10 \equiv 8 \pmod{11}$$

por el P. T. F.

Finalmente,

$$S \equiv r \pmod{55} \Leftrightarrow 0 \equiv r \pmod{5} \text{ y } 8 \equiv r \pmod{11},$$

y por lo tanto $r = 30$.

Se concluye así que $r_{55}(\sum_{k=1}^{1000} k^{20}) = 30$.

■