6

8

Probabilidades y Estadística (C)
Examen Final
(21/07/06)

Nombre y Apellido: MATÍAS LÓPEZ Y ROSENFELD
N° de libreta: 437/03 N° de hojas entregadas: 4
e-mail: matiaslopez@gmail.com

El examen final se aprueba con 50 puntos

Enuncie las propiedades que utiliza

---

1. (**25 puntos**) Sean A y B dos sucesos cualesquiera de un espacio muestral S. 19

   (a) Definir la independencia entre A y B. ✓

   (b) Probar que si A y B son independientes, entonces A también es independiente de B^c (B complemento). ¿ Son A^c y B^c independientes? Justificar detalladamente. ✓

   (c) Probar que si A tiene probabilidad nula, entonces es independiente de todo evento B. nual.

   evento B.

2. (**25 puntos**) Sean X una variable aleatoria con distribución $\Gamma(\alpha, \lambda)$:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} I_{(x>0)} \,.$$

   (a) Defina función generadora de momentos para una variable aleatoria y demuestre que la función generadora de momentos de X, definida en el item anterior, está dada por 25.

$$M_X(t) = \left[\frac{\lambda}{\lambda - t}\right]^\alpha \,.$$ ✓

   (b) Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a. i.i.d. $Y_i \sim E(\lambda)$. Deducir la distribución de $\sum_{i=1}^n Y_i$. Justificar detalladamente. ✓

   (c) Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a. i.i.d. $Y_i \sim E(\lambda)$.Demostrar que la distribución del $\min_{1 \le i \le n} Y_i$ también es exponencial. ¿ De qué parámetro? ✓

3. (**25 puntos**) Supongamos que $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con distribución $N(0, \sigma^2)$. 25.

   (a) Hallar $\hat{\sigma}_n^2$, el estimador de momentos de σ^2. ✓

   (b) Demostrar que $\hat{\sigma}_n^2$ es un estimador insesgado y consistente de σ^2. ✓

   (c) ¿ Es $\hat{\sigma}_n$ un estimador consitente de σ? Justificar detalladamente. ✓

4. (**25 puntos**) Supongamos $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con distribución $P(\lambda)$ que miden el número de señales que emite una fuente en n períodos de de un minuto y no solapados. Asimismo, asumamos que el tamaño muestral, n, es tan grande como se desee.

   (a) Deducir un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.90 para λ basándose en la muestra dada.

   (b) Si para una muestra del 100 períodos de longitud igual a un minuto se observó un total de 96 señales emitidas, calcular un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.90 para λ. 15

   (c) Supongamos que antes de tomar la muestra un ingeniero sostiene que el número medio de señales emitidas por la fuente en un período de un minuto es igual a 1. En base a la muestra utilizada en b) y al intervalo de confianza hallado, ¿tiene el ingeniero razón? ¿Qué decisión tomaríamos? ¿Con qué nivel tomaríamos esta decisión? Justificar las respuestas.

$\mu_0 = 0$ $\mu_1 \geq 0$

$z_{1-0,75} = V$

z_α

$P(X \leq V) = \cancel{1}\, 0,75$