

6

8

9/10/06

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)
EXAMEN FINAL
(21/07/06)

NOMBRE Y APELLIDO: MATÍAS LÓPEZ Y ESCOBEDO

Nº DE LIBRETA: 437/03

Nº DE HOJAS ENTREGADAS: 4

e-mail: matiaslopez@gmail.com

EL EXAMEN FINAL SE APRUEBA CON 50 PUNTOS

ENUNCIE LAS PROPIEDADES QUE UTILIZA

1. (25 puntos) Sean A y B dos sucesos cualesquiera de un espacio muestral S .

(a) Definir la independencia entre A y B . ✓

(b) Probar que si A y B son independientes, entonces A también es independiente de B^c (B complemento). ¿Son A^c y B^c independientes? Justificar detalladamente. ✓

(c) Probar que si A tiene probabilidad nula, entonces es independiente de todo evento B . nul.

evento B .

2. (25 puntos) Sean X una variable aleatoria con distribución $\Gamma(\alpha, \lambda)$:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} I_{(x>0)}.$$

(a) Defina función generadora de momentos para una variable aleatoria y demuestre que la función generadora de momentos de X , definida en el item anterior, está dada por

$$M_X(t) = \left[\frac{\lambda}{\lambda - t} \right]^\alpha. \quad \checkmark$$

(b) Sean Y_1, \dots, Y_n v.a. i.i.d. $Y_i \sim E(\lambda)$. Deducir la distribución de $\sum_{i=1}^n Y_i$. Justificar detalladamente. ✓

(c) Sean Y_1, \dots, Y_n v.a. i.i.d. $Y_i \sim E(\lambda)$. Demostrar que la distribución del $\min_{1 \leq i \leq n} Y_i$ también es exponencial. ¿De qué parámetro? ✓

3. (25 puntos) Supongamos que X_1, \dots, X_n son v.a. independientes con distribución $N(0, \sigma^2)$.

(a) Hallar $\hat{\sigma}_n^2$, el estimador de momentos de σ^2 . ✓

(b) Demostrar que $\hat{\sigma}_n^2$ es un estimador insesgado y consistente de σ^2 . ✓

(c) ¿Es $\hat{\sigma}_n$ un estimador consistente de σ ? Justificar detalladamente. ✓

25.

4. (25 puntos) Supongamos X_1, \dots, X_n son v.a. independientes con distribución $P(\lambda)$ que miden el número de señales que emite una fuente en n períodos de un minuto y no solapados. Asimismo, asumamos que el tamaño muestral, n , es tan grande como se desee.

(a) Deducir un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.90 para λ basándose en la muestra dada.

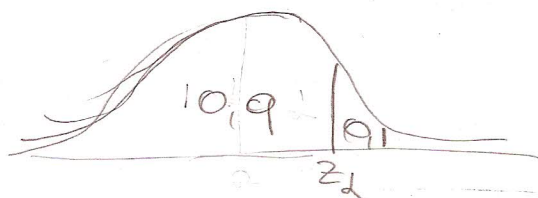
(b) Si para una muestra del 100 períodos de longitud igual a un minuto se observó un total de 96 señales emitidas, calcular un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.90 para λ .

(c) Supongamos que antes de tomar la muestra un ingeniero sostiene que el número medio de señales emitidas por la fuente en un período de un minuto es igual a 1. En base a la muestra utilizada en b) y al intervalo de confianza hallado, ¿tiene el ingeniero razón? ¿Qué decisión tomaríamos? ¿Con qué nivel tomaríamos esta decisión? Justificar las respuestas.

15

$$\mu_0 = 0$$

$$\mu_1 \geq 0$$



z_2

$$z_{1-0.75} = V$$

$$P(X \leq V) = 0.75$$

