1	2	3	4	5

Calif.

Apellido y Nombre: Mail:

Libreta: Turno: 10 a 13 16 a 19 **TEMA 1**

Algebra Lineal - 1er Cuatrimestre 2014

1er Parcial (17/05/2014)

---

1. Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^9)$ tal que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 6$ y $\mathrm{Nu}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$. Determinar $\dim(\mathrm{Im}(f^2))$.

---

2. Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2\times 2})$ definido por

$$f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{12} & a_{21} - a_{22} \\ a_{21} - a_{22} & a_{11} - a_{12} \end{pmatrix}.$$

Determinar bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ para las cuales $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ sea una matriz diagonal, con sólo 1 o 0 en la diagonal.

---

3. Sean $\varphi_i \in \mathbb{R}_3[X]^*$, $1 \le i \le 4$, dados por

$$\varphi_1(P) = P(-1), \quad \varphi_2(P) = P'(-1), \quad \varphi_3(P) = P(0), \quad \varphi_3(P) = P(1), \quad \forall P \in \mathbb{R}_3[X].$$

(a) Probar que $\mathcal{B}' = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ es una base de $(\mathbb{R}_3[X])^*$ y hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ tal que $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'$.

(b) Sea $\varphi \in \mathbb{R}_3[X]^*$ definida por $\varphi(P) = \int_0^1 P(x)dx$, $\forall\, P \in \mathbb{R}_3[X]$. Calcular las coordenadas de φ en la base $\mathcal{B}'$.

---

4. Sea $(V, \langle\ \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, y sea $\Phi : V \to V^*$ la función definida por $\Phi(v) = \langle -, v\rangle \in V^*$, es decir $\Phi(v)(\omega) = \langle \omega, v\rangle$, $\forall\, \omega \in V$.

(a) Probar que $\Phi : V \to V^*$ es una transformación lineal, y más aún, que es un isomorfismo.

(b) Sea $S \subseteq V$ un subespacio. Probar que $\Phi(S^{\perp}) = S^{\circ}$.

(c) Sea $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de V. Probar que $\mathcal{B}$ es ortonormal si y sólo si $(\Phi(v_1), \ldots, \Phi(v_n))$ es la base dual de $\mathcal{B}$.

---

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Probar que A^tA es simétrica y definida positiva.

(b) Sea $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ el producto interno definido por $\langle x, y\rangle = x^tA^tAy$, donde x e y son vectores columna, y sean

$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 \ :\ x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_4 = 0\} \quad \text{y} \quad T = \{x \in \mathbb{R}^4 \ :\ x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0\}.$$

Dado $x \in T$, calcular $d(x, S)$, la distancia de x a S inducida por $\langle\ ,\ \rangle$, y deducir que para todo $x \in T$, $d(x, S) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

Justificar todas las respuestas