1. INTEGRALES IMPROPIAS

Definiciones:

1. $f : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall\, \alpha \in (a,b)$ f es integrable en $[\alpha, b]$, se define:
   $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,dx$
   Si el límite es un número real, tal límite es el valor principal de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

2. $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall\, \beta \in (a,b)$ f es integrable en $[a, \beta]$, se define:
   $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx$
   Si el límite es un número real, tal límite es el valor principal de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

3. $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que tomando $x_0 \in (a,b), \forall\, \alpha \in (a, x_0)$ y $\forall\, \beta \in (x_0, b)$ f es integrable en los intervalos $[\alpha, x_0]$ y $[x_0, \beta]$, se define:
   $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^{x_0} f(x)\,dx + \lim_{\beta\to b^-} \int_{x_0}^\beta f(x)\,dx$
   Si ambos límites son números reales.

4. $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\exists x_0 \in (a,b)$ tal que las integrales impropias $\int_a^{x_0} f(x)\,dx$ y $\int_{x_0}^b f(x)\,dx$ convergen, se define:
   $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx$

---

1. $f : (-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall\, \alpha \in (-\infty, b)$ f es integrable en $[\alpha, b]$, se define:
   $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to -\infty} \int_\alpha^b f(x)\,dx$ Si el límite es un número real.

2. $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall\, \beta \in (a, +\infty)$ f es integrable en $[a, \beta]$, se define:
   $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta\to +\infty} \int_a^\beta f(x)\,dx$ Si el límite es un número real.

3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para $x_0 \in \mathbb{R}$ las integrales impropias $\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx$ y $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ convergen, se define:
   $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$

Integrales útiles:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \begin{cases} si \;\; p<1 \;\; converge \\ si \;\; p\geq 1 \;\; diverge \end{cases} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \begin{cases} si \;\; p>1 \;\; converge \\ si \;\; p\leq 1 \;\; diverge \end{cases}$$

Criterios de convergencia:

1. **Comparación:**
   I : cualquiera de los primeros 7 intervalos de integración enumerados.
   $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $0 \leq f(x) \leq g(x) \,\forall\, x \in I$ tal que f es integrable en I (g también lo será), entonces:

   $$\int_I g(x)\,dx \text{ converge} \Longrightarrow \int_I f(x)\,dx \text{ converge}$$

2. **Comparación por paso al límite:**
   $f, g : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que f y g son integrables en $[a, \beta]\ \forall\ \beta > a$, $f(x) \geq 0$ y $g(x) > 0\ \forall\ x \in [a, +\infty)$, entonces:

   i) Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ (*no* ∞, *siempre* > 0) entonces:
   $$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \; converge \iff \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \; converge$$

   ii) Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ entonces:
   $$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \; converge \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \; converge$$

   iii) Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ entonces:
   $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \; converge \Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \; converge$$

Definiciones:

1. La integral impropia de f se dice absolutamente convergente si la integral impropia de $|f|$ converge.

2. La integral impropia de f se dice condicionalmente convergente si la integral impropia de f converge pero la de la $|f|$ no.

Proposición:

I : cualquiera de los primeros 7 intervalos de integración enumerados.
$$\int_I f(x)\,dx \text{ converge abosolutamente} \Longrightarrow \int_I f(x)\,dx \text{ converge}$$