Práctica 3
Cuantificadores

Algoritmos y Estructura de Datos I

Primer Cuatrimestre 2011

Ejercicio 1.

1. Determinar cuáles de las variables que aparecen en las siguientes expresiones aparecen libres y cuáles ligadas.

   a) $(\forall x \in [0..n))\ x + y == z$

   b) $(\forall x \in [0..n), y \in [0..m))\ x + y == z$

   c) $(\forall j \in [0..|s|))\ s_j == 0$

   d) $(\forall j \in [0..|s|))\ s_j == x$

   e) $(\exists x \in r, x \mod 2 == 0)(\forall j \in [0..|s|))\ s_j == x$

   f) $(|s| \geq 5 \wedge a < b - 1 \wedge (\forall j \in [a..b))\ 2 * s_j == s_{j+1})$

2. ¿De qué tipo son las variables r, s y x del item **??**?

3. En los casos en que sea posible, proponer valores para las variables libres del item **??** de modo tal que las expresiones sean verdaderas.

Ejercicio 2. Escriba los siguientes predicados en lenguaje de especificación:

1. *aux suc* $(x : \mathbb{Z})$: $\mathbb{Z}$, que corresponde al sucesor de x.
2. *aux suma* $(x, y : \mathbb{R})$: $\mathbb{R}$, que corresponda a la suma entre x e y.
3. *aux producto* $(x, y : \mathbb{R})$: $\mathbb{R}$, que corresponde al producto entre x e y.
4. *aux cuadrado* $(x : \mathbb{Z})$: Bool, que sea verdadero sii x es un número cuadrado.
5. *aux primo* $(x : \mathbb{Z})$: Bool, que sea verdadero sii x es primo.
6. *aux coprimos* $(x, y : \mathbb{Z})$: Bool, que sea verdadero sii x e y son coprimos.
7. *aux divisoresGrandes* $(x, y : \mathbb{Z})$: Bool, que sea verdadero sii todos los divisores de x, sin contar el uno, son mayores que y.
8. *aux mayorPrimo* $(x : \mathbb{Z})$: $\mathbb{Z}$, que represente el mayor primo que divide a x.
9. *aux mcm* $(x, y : \mathbb{Z})$: $\mathbb{Z}$, que represente el mínimo común múltiplo entre x e y.
10. *aux mcd* $(x, y : \mathbb{Z})$: $\mathbb{Z}$, que represente el máximo común divisor entre x e y.

Ejercicio 3. Escriba las siguientes funciones auxiliares sobre secuencias de enteros, aclarando los tipos de los parámetros que recibe y devuelve:

1. *capicúa*, que determina si una secuencia es capicúa. (Por ejemplo, [0,2,1,2,0] es capicúa y [0,2,1,4,0] no).
2. *esPrefijo*, que determina si una secuencia es prefijo de otra.
3. *estáOrdenada*, que determina si la secuencia está ordenada de menor a mayor.
4. *todosPrimos*, que determina si todos los elementos de la secuencia son números primos.

5. *todosIguales*, que determina si todos los elementos de la secuencia son iguales.
6. *hayUnoParQueDivideAlResto*, que determina si hay un elemento par en la secuencia que divide al resto.
7. *hayUnoEnPosiciónParQueDivideAlResto*, que determina si hay un elemento en una posición par de la secuencia que divide al resto.
8. *sinRepetidos*, que determina si la secuencia no tiene repetidos.
9. *sinMasDeNApariciones*, que determina si en la secuencia, ningún elemento aparece más de n veces.
10. *otroMayorADerecha*, que determina si todo elemento de la secuencia, salvo el último, tiene otro mayor a su derecha.
11. *todoEsMúltiplo*, que determina si todo elemento de la secuencia es múltiplo de algún otro.
12. *enTresPartes*, que determina si en la secuencia aparecen (de izquierda a derecha) primero 0s, después 1s y por último 2s. Por ejemplo $[0, 0, 1, 1, 1, 1, 2]$ cumple con *enTresPartes*, pero $[0, 1, 3, 0]$ o $[0, 0, 0, 1, 1]$ no. ¿Cómo modificaría la expresión para que se admitan cero apariciones de 0s, 1s y 2s (es decir, para que por ejemplo $[0, 0, 0, 1, 1]$ o $[\,]$ sí cumplan *enTresPartes*?

Ejercicio 4. Sean *aux* P $(x : \mathbb{Z})$*:* Bool, y *aux* Q $(x : \mathbb{Z})$*:* Bool, dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen. Considerar los siguientes enunciados y su predicado asociado. Determinar, en cada caso, por qué el predicado no refleja correctamente el enunciado. Corregir los errores.

1. *"Todos los naturales menores a 10 que cumplen P, cumplen Q":*

   aux a: Bool $= (\forall x \in [0..10))(P(x) \wedge Q(x))$
2. *"No hay ningún natural menor a 10 que cumpla P y Q":*

   aux c: Bool $= (\neg(\exists x \in [0..10))P(x) \wedge \neg(\exists x \in [0..10])Q(x))$

Ejercicio 5. Sean *aux* P $(x : \mathbb{Z})$*:* Bool, y *aux* Q $(x : \mathbb{Z})$*:* Bool, dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen y sea s una secuencia de enteros. Escribir el predicado asociado a cada uno de los siguientes enunciados:

1. *"Si un entero en s cumple P, también cumple Q"*
2. *"Todos los enteros de s que cumplen P, no cumplen Q"*
3. *"Todos los enteros de s que están en posiciones pares y cumplen P, no cumplen Q"*
4. *"Todos los enteros de s que cumplen P y están en posiciones que cumplen Q, son pares"*
5. *"Si hay un entero en s que no cumple P entonces ninguno en s cumple Q"*
6. *"Si hay un entero en s que no cumple P entonces ninguno en s cumple Q; y si todos los enteros de s cumplen P entonces hay al menos dos elementos de s que cumplen Q"*

Ejercicio 6. Sean *aux* P $(x : \mathbb{Z})$*:* Bool, y *aux* Q $(x : \mathbb{Z})$*:* Bool, dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen, sea s una secuencia de enteros y sean a, b y k enteros. Decidir en cada caso la relación de fuerza entre las dos fórmulas:

1. $P(3)$ y $(\forall k \in [0..10))\ P(k)$
2. $P(3)$ y $(k > 5 \wedge (\forall i \in [0..k))\ P(i))$
3. $P(3)$ y $(\forall i \in [0..k))\ P(i)$
4. $(\forall n \in s, P(n))\ Q(n)$ y $(\forall n \in s)\ Q(n)$
5. $(\exists n \in s, P(n))\ Q(n)$ y $(\forall n \in s)\ Q(n)$
6. $(\exists n \in s, P(n))\ Q(n)$ y $(|s| > 0 \wedge (\forall n \in s)\ Q(n))$
7. $(\exists n \in s, P(n))\ Q(n)$ y $(\forall n \in s)(P(n) \wedge Q(n))$
8. $(0 \leq a < b < |s| \wedge (\forall i \in [a, b])P(s_i))$ y $(\forall i \in [0..|s|))\ P(s_i)$

9. $(0 < k < |s| \wedge (\forall i \in [0..k)) P(s_i))$ y $(0 < k < |s| \wedge P(s_{k-1}) \wedge (\forall i \in [0..k-1)) P(s_i))$

10. $(0 \leq k < |s| \wedge (\forall i \in [0..k))\ P(s_i))$ y $(0 \leq k < |s| \wedge P(s_{k-1}) \wedge (\forall i \in [0..k-1))\ P(s_i))$

11. $k = 0$ y $(\forall i \in [0..k))\ P(i)$

12. $\neg(\exists i \in [0..|s|), j \in [0..|s|))\ s_i \neq s_j$ y $(\forall j \in [0..|s|))\ s_i == 0$

Ejercicio 7. Sea s una secuencia de enteros. Determinar si las siguientes pares de expresiones son equivalentes. En caso de que no lo sean, ilustrar con ejemplos.

1. $(\forall i \in [0..|s|), j \in [0..|s|), i < j)\ s_i < s_j$ y $(\forall j \in [0..|s|), i \in [0..|s|), i < j)\ s_i < s_j$

2. $(\exists i \in [0..|s|), j \in [0..|s|), i < j-1)\ \mathit{TodosIguales}(s[i..j])$ y $(\exists j \in [0..|s|), i \in [0..|s|), i < j-1)\ \mathit{TodosIguales}(s[i..j])$, donde *todosIguales* es el definido en el item **??** del ejercicio **??**.

3. $(\forall i \in [0..|s|))(\exists j \in [0..|s|))\ s_i == s_j$ y $(\exists j \in [0..|s|))(\forall i \in [0..|s|))\ s_i == s_j$