Recuperatorio de Lógica

(versión SisOp)

Lógica y Computabilidad

2do cuatrimestre de 2010

Este examen se aprueba obteniendo al menos **50 puntos**. El parcial es a libro abierto y se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras. En el caso de usar resultados de las guías de ejercicios, deben incluirse las demostraciones.

Ejercicio 1. Sea Γ un conjunto consistente de fórmulas proposicionales del lenguaje $\{\neg, \rightarrow\}$ y sea $\mathbf{Con}(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \vdash \varphi\}$

a) (**10 p.**) Demostrar que $\mathbf{Con}(\Gamma)$ es consistente.

b) (**10 p.**) Demostrar que, en general, $\mathbf{Con}(\Gamma)$ *no es* maximal consistente.

c) (**20 p.**) Demostrar que, si Γ cumple que para toda variable proposicional p_i vale $p_i \in \Gamma$ o bien $\neg p_i \in \Gamma$, entonces $\mathbf{Con}(\Gamma)$ *es* maximal consistente.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{L} = \{=, f, 0\}$ el lenguaje de primer orden con igualdad y una función unaria f y una constante 0. Decimos que una función f tiene *soporte finito* en el modelo $\mathcal{M}$ si el conjunto $D_f = \{x : f^{\mathcal{M}}(x) \neq 0\}$ es finito.

a) (**10 p.**) Demostrar que, para todo $n > 0$, existe una $\mathcal{L}$-fórmula ψ_n tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ y toda valuación v, $\mathcal{M} \models \psi_n[v]$ sii $|D_f| \geq n$.

b) (**30 p.**) Demostrar que no es posible dar una $\mathcal{L}$-fórmula φ tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ y toda valuación v, $\mathcal{M} \models \varphi[v]$ sii f tiene soporte finito.

Ejercicio 3. Sea S un sistema axiomático de primer orden correcto y completo respecto a una clase de modelos $\mathcal{C}$ y sea Γ un conjunto consistente de fórmulas. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Demostrar *detalladamente* o proveer un contraejemplo según corresponda.

a) (**5 p.**) El sistema resultante de tomar $S \cup \Gamma$ es completo con respecto a $\mathcal{C}$.

b) (**5 p.**) El sistema resultante de tomar $S \cup \Gamma$ es correcto con respecto a $\mathcal{C}$.

c) (**10 p.**) Si $\mathcal{C} \models \Gamma$, el sistema resultante de tomar $S \cup \Gamma$ es correcto con respecto a $\mathcal{C}$.