Algebra I - Práctica I

Índice

1 Conjuntos

1. Dado el conjunto $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

i) $1 \in A$	ii) $\{1\} \subseteq A$	iii) $\{2,\ 1\} \subseteq A$	iv) $\{1,\ 3\} \subseteq A$	v) $\{2\} \in A$
i) V	ii) V	iii) V	iv) V	v) F

2. Dado el conjunto $A = \{1,\ 2,\ \{3\},\ \{1,\ 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

i) $3 \in A$	ii) $\{3\} \subseteq A$	iii) $\{3\} \in A$
iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$	v) $\{1,\ 2\} \in A$	vi) $\{1,\ 2\} \subseteq A$
vii) $\{\{1,\ 2\}\} \subseteq A$	viii) $\{\{1,\ 2\},\ 3\} \subseteq A$	ix) $\varnothing \in A$
x) $\varnothing \subseteq A$	xi) $A \in A$	xii) $A \subseteq A$

i) F	ii) F	iii) V
iv) V	v) V	vi) F
vii) F	viii) F	ix) F
x) V	xi) F	xii) V

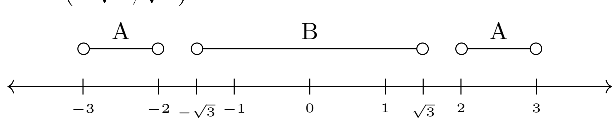
3. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos:

i) $A = \{1,\ 2,\ 3\}, B = \{5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\}$
ii) $A = \{1,\ 2,\ 3\}, B = \{1,\ 2,\ \{3\},\ -3\}$
iii) $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\}, B = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 3\right\}$
iv) $A = \{\varnothing\}, B = \varnothing$

i) $A = \{1,\ 2,\ 3\}, B = \{5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\}$
$1 \in B,\ 2 \in B,\ 3 \in B \ \Rightarrow\ A \subseteq B$

ii) $A = \{1,\ 2,\ 3\}, B = \{1,\ 2,\ \{3\},\ -3\}$
$1 \in B,\ 2 \in B,\ 3 \notin B \ \Rightarrow\ A \nsubseteq B$

iii) $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\}, B = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 3\right\}$
$A = (-3, -2) \cup (2, 3)$
$B = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$



$A \nsubseteq B$

iv) $A = \{\varnothing\}, B = \varnothing$
$\varnothing \notin B$
$A \nsubseteq B$

4.

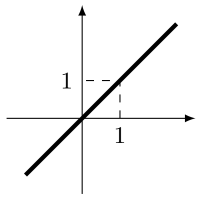
i) Describir a los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ por comprensión mediante *una sola* ecuación:

i) $\{-3,\ 1,\ 5\}$ ii) $(-\infty, 2] \cup [7, +\infty)$

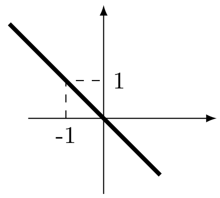
i) $\{x \in \mathbb{R} : (x+3)\cdot(x-1)\cdot(x-5) = 0\}$ ii) $\left\{x \in \mathbb{R} : |x - \frac{9}{2}| \geq \frac{5}{2}\right\}$

ii) Describir a los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ por comprensión mediante *una sola* ecuación:

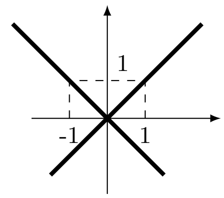
i)



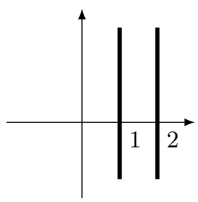
ii)



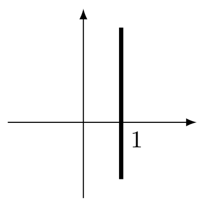
iii)



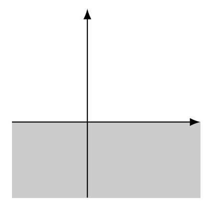
iv)



v)



vi)



i) $\left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\}$ ii) $\left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\right\}$ iii) $\left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\right\}$

iv) $\{x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$ v) $\left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\right\}$ vi) $\left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\right\}$

5. Dados los subconjuntos $A = \{1,\ -2,\ 7,\ 3\}$, $B = \{1,\ \{3\},\ 10\}$ y $C = \{-2,\ \{1,\ 2,\ 3\},\ 3\}$ del conjunto referencial $V = \{1,\ \{3\},\ -2,\ 7,\ 10,\ \{1,\ 2,\ 3\},\ 3\}$, hallar:

i) $A \cap (B \triangle C)$ ii) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$ iii) $A^c \cap B^c \cap C^c$

i) $\{1,\ -2,\ 7,\ 3\} \cap \left(\{1,\ \{3\},\ 10\} \triangle \{-2,\ \{1,\ 2,\ 3\},\ 3\}\right)$
$\{1,\ -2,\ 7,\ 3\} \cap \{1,\ \{3\},\ 10,\ -2,\ \{1,\ 2,\ 3\},\ 3\}$
$\{1,\ -2,\ 3\}$

ii) $(\{1,\ -2,\ 7,\ 3\} \cap \{1,\ \{3\},\ 10\}) \triangle (\{1,\ -2,\ 7,\ 3\} \cap \{-2,\ \{1,\ 2,\ 3\},\ 3\})$
$\{1\} \triangle \{-2,\ 3\}$
$\{1,\ -2,\ 3\}$

iii) $\{1,\ -2,\ 7,\ 3\}^c \cap \{1,\ \{3\},\ 10\}^c \cap \{-2,\ \{1,\ 2,\ 3\},\ 3\}^c$
$\{\{3\},\ 10,\ \{1,\ 2,\ 3\}\} \cap \{-2,\ 7,\ \{1,\ 2,\ 3\},\ 3\} \cap \{1. \{3\},\ 7,\ 10\}$
$\varnothing$

6. Dados subconjuntos A, B, C de un conjunto referencial V, describir $(A \cup B \cup C)^c$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^c$ en términos de uniones y complementos.

$(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$

$(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$

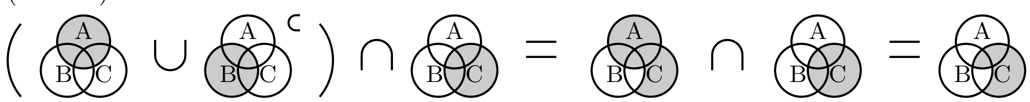
7. Sean A, B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn:

   i) $(A \cup B^c) \cap C$

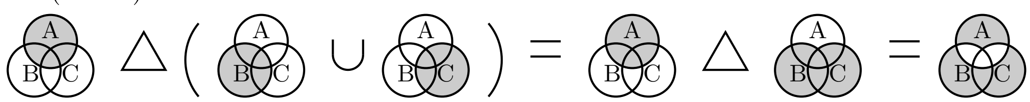
   ii) $A \triangle (B \cup C)$

   iii) $A \cup (B \triangle C)$

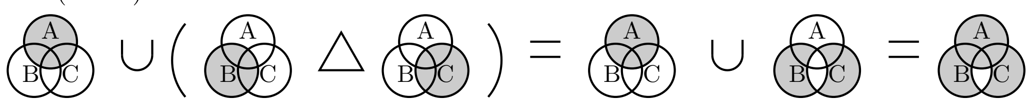
i) $(A \cup B^c) \cap C$



ii) $A \triangle (B \cup C)$

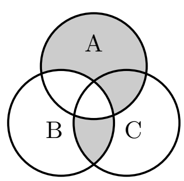


iii) $A \cup (B \triangle C)$

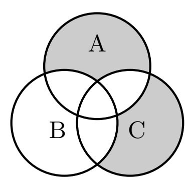


8. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

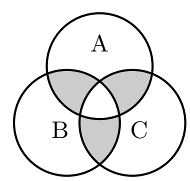
i)



ii)



iii)



i) $(A \cap B^c) \cup (B \cap C \cap A^c)$

ii) $B^c \cap (A \cap C)^c$

iii) $\big((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)\big) \cap (A \cap B \cap C)^c$

9. Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos

   i) $A = \{1\}$ ii) $A = \{a,\ b\}$ iii) $A = \{1,\ \{1,\ 2\},\ 3\}$

i) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing,\ A\}$

ii) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ A\}$

iii) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{\{1,\ 2\}\},\ \{3\},\ \{1,\ \{1,\ 2\}\},\ \{1,\ 3\},\ \{\{1,\ 2\},\ 3\},\ A\}$

10. Sean A y B conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$.

$\Rightarrow$) $A \in \mathcal{P}(A) \wedge \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

En particular

$A \in \mathcal{P}(B) \ \Rightarrow \ A \subseteq B$

$\Leftarrow$) $A \subseteq B \ \Rightarrow \ \forall x \subseteq A \ \Rightarrow \ x \subseteq B$

11. Sean p, q proposiciones Verdaderas o Falsas. Comparar las tablas de verdad de:

i) $p \Rightarrow q$ ii) $\sim p \Rightarrow \sim q$ iii) $\sim p \vee q$ iv) $\sim (p \wedge \sim q)$

i)

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

ii)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

iii)

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

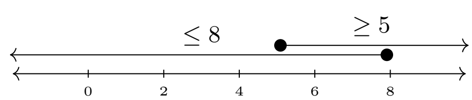
iv)

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

12. Decidir si son verdaderas o falsas:

i)
a) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5$ b) $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 5$ c) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \vee n \leq 8$
d) $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \wedge n \leq 8$ e) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m > n$ f) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m > n$

a) $3 \in \mathbb{N} \wedge 3 < 5$ F
b) $6 \in \mathbb{N} \wedge 6 > 5$ V
c)

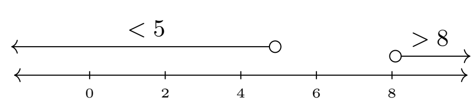


V

d) $6 \in \mathbb{N} \wedge 5 < 6 < 8$ V
e) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists S(n) = n + 1$ V
f) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m = n$ F

ii) Negar las proposiciones anteriores, y en cada caso verificar que la proposición negada tiene el valor de verdad opuesto al de la original.

a) $\exists n \in \mathbb{N}, n < 5$
$4 \in \mathbb{N}, 4 < 5$ V
b) $\forall n \in \mathbb{N}, n < 5$
$6 \in \mathbb{N}, 6 \geq 5$ F
c) $\exists n \in \mathbb{N}, n < 5 \wedge n > 8$



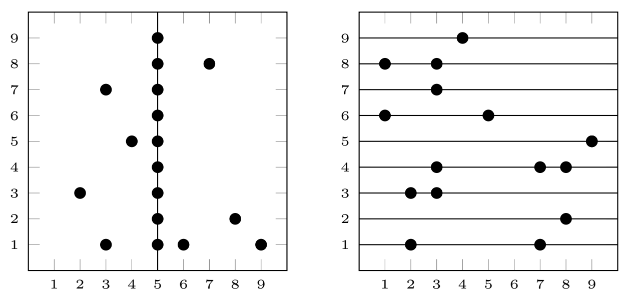
F

d) $\forall n \in \mathbb{N}, n < 5 \wedge n > 8$
$6 \in \mathbb{N}, 5 < 6 < 8$ F
e) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \leq n$
$\forall n \in \mathbb{N}, \exists S(n), S(n) > n$ F
f) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m \leq n$
$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m = n$ V

iii) En cada uno de los casos siguientes, decidir si las dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad. Dar un contraejemplo cuando no es el caso.

a) $\exists x, \forall y, p(x,y)$ y $\forall y, \exists x, p(x,y)$ b) $\forall x, p(x)$ y $\nexists x, \sim p(x)$

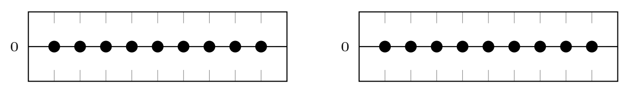
a)



$\exists x, \forall y, p(x,y)$ $\forall y, \exists x, p(x,y)$

- $\exists x, \forall y, p(x,y) \neq \forall y, \exists x, p(x,y)$

b)



$\forall x, p(x)$ $\nexists x, \sim p(x)$

- $\forall x, p(x) = \nexists x, \sim p(x)$

13. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial V y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$ ii) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$

iii) $C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$ iv) $A \triangle B = \varnothing \Longleftrightarrow A = B$

i) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$

$$
\begin{aligned}
&= (A \cup B - A \cap B) - C \\
&= ((A \cup B - C) - (A \cap B - C)) \\
&= (((A - C) \cup (B - C)) - ((A - C) \cap (B - C))) \\
&= (A - C) \triangle (B - C)
\end{aligned}
$$

ii) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$

$x \in (A \triangle B) \Longleftrightarrow x \in A \veebar x \in B$

Si $x \in A, x \notin C \Rightarrow x \in (A \triangle C)$

Si $x \in A, x \in C \Rightarrow x \in (B \triangle C)$

Si $x \in B, x \notin C \Rightarrow x \in (B \triangle C)$

Si $x \in B, x \in C \Rightarrow x \in (A \triangle C)$

iii) $C \subseteq A \ \Rightarrow \ B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$
$C \subseteq A \ \Rightarrow \ B \cap C \subseteq B \cap A$
$B \cap A \subseteq (A \triangle B)^c$
$\subseteq ((A \cup B) \cap (A \cap B)^c)^c$
$\subseteq (A \cup B)^c \cup (A \cap B)$
$\subseteq (B \cap A) \cup (A \cup B)^c$

iv) $A \triangle B = \varnothing \iff A = B$

$\Rightarrow)$ $A \triangle B = \varnothing \iff (A \cup B) - (A \cap B) = \varnothing$
$(A \cup B) - (A \cap B) = \varnothing \iff (A \cup B) \subseteq (A \cap B)$
$(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$ por definición
$(A \cup B) \subseteq (A \cap B) \wedge (A \cap B) \subseteq (A \cup B) \iff A = B$
$\Leftarrow)$ $A = B \ \Rightarrow \ (A \triangle B) = (A \triangle A) = \varnothing$

14. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V. Probar que:

i) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
iii) $A - (A \triangle B) = A \cap B$
iv) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$
v) $A \subseteq B \ \Rightarrow \ A \triangle B = B \cap A^c$
vi) $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$
vii) $C \subseteq A \ \Rightarrow \ (A \cup B) \cap C^c = (B - C) \cup (A \triangle C)$
viii) $A \cap C = \varnothing \ \Rightarrow \ A \cap (B \triangle C) = A \cap B$

i) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
$= (A \cap B) \cup (A \cap C) - (A \cap B) \cap (A \cap C)$
$= A \cap (B \cup C) - A \cap B \cap C$
$= A \cap (B \cup C - B \cap C)$
$= A \cap (B \triangle C)$

ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
$= (A - B) \cup (A - (A \cap C)^c)$
$= A - B \cap (A \cap C)^c$
$= A - ((A \cap C)^c - B^c)$
$= A - (A^c \cup C^c - B^c)$
$= A - (C^c - B^c)$
$= A - (C^c \cap B)$
$= A - (B - C)$

iii) $A - (A \triangle B) = A \cap B$
$A \cap (A \cup B - A \cap B)^c$
$A \cap ((A \cup B) \cap (A \cap B)^c)^c$
$A \cap ((A \cup B)^c \cup (A \cap B))$
$(A \cap (A \cup B)^c) \cup (A \cap (A \cap B))$
$\varnothing \cup (A \cap A \cap B)$
$A \cap B$

iv) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$
$(A \cap C) \cap B^c$
$C \cap A \cap B^c$
$C \cap (A \cap B^c)$
$C \cap (A - B)$
$(A - B) \cap C$

v) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \triangle B = B \cap A^c$
$A \triangle B = A \cup B - A \cap B$
$A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \cup B = B \wedge A \cap B = A$
$A \triangle B = B - A = B \cap A^c$

vi) $A \subseteq B \Longleftrightarrow B^c \subseteq A^c$

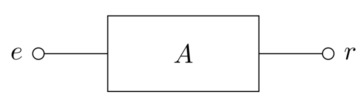
$\Rightarrow)$ $\exists x \notin B, x \in A$
$\exists x \in A, x \notin B \;\Rightarrow\; A \not\subseteq B$, Abs!
$\Leftarrow)$ $\exists x \in A, x \notin B$
$\exists x \notin B, x \in A \;\Rightarrow\; B^c \not\subseteq A^c$, Abs!

vii) $C \subseteq A \;\Rightarrow\; (A \cup B) \cap C^c = (B - C) \cup (A \triangle C)$
$C \subseteq A \;\Rightarrow\; (A \triangle C) = (A \cup C - A \cap C) = A - C$
$(B - C) \cup (A \triangle C) = (B - C) \cup (A - C) = B \cup A - C = (A \cup B) \cap C^c$

viii) $A \cap C = \varnothing \;\Rightarrow\; A \cap (B \triangle C) = A \cap B$
$A \cap (B \triangle C) = A \cap (B \cup C - B \cap C)$
$A \cap (B \cup C - B \cap C) = A \cap (B \cup C) \cap (B \cap C)^c$
$A \cap C = \varnothing \;\Rightarrow\; A \cap (B \cup C) \cap A \cap (B \cap C)^c = (A \cap B) \cap (A \cap (B \cap C)^c)$
$(A \cap B) \cap (A \cap (B \cap C)^c) = (A \cap B) \cap (A - (B \cap C))$
$(A \cap B) \cap (A - (B \cap C)) = (A \cap B) \cap A = A \cap B$

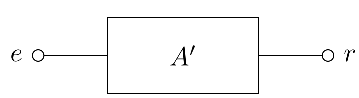
15. Un emisor e envía señales de diferentes frecuencias a un receptor r a través de un cable conductor.

Se dipone de filtros que dejan pasar a unas señales sí y a otras no, dependiendo de sus frecuencias.



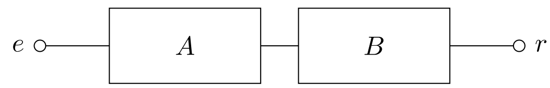
filtro

Cada uno de estos filtros tiene una llave que al accionarla invierte el espectro de frecuencias que el filtro deja pasar.

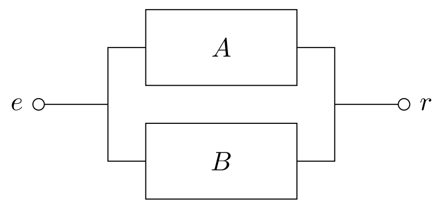


filtro invertido

Los filtros pueden conectarse en serie o en paralelo para formar nuevos filtros.



serie



paralelo

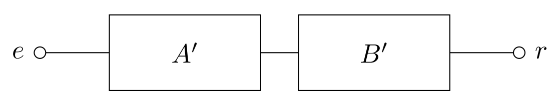
Se considera ahora en el conjunto de todas las frecuencias y se identifica a cada filtro con el subconjunto formado por aquellas fecuencias que éste deja pasar. Observar que con la identificación recién establecida, se tienen las siguientes correspondencias:

Filtro invertido $\sim$ Complemento, Conexión serie $\sim$ Intersección, Conexión paralela $\sim$ Unión

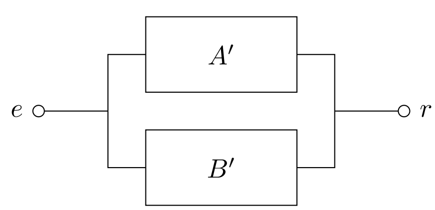
i) Diseñar circuitos de los siguientes filtros a partir de los filtros A, B y C

a) $(A \cup B)'$	b) $(A \cap B)'$	c) $A \cup (B \cap C)$
d) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$	e) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$	f) $A \triangle B$

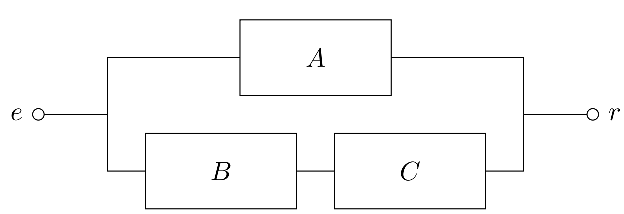
a) $(A \cup B)'$
$(A \cup B)' = A' \cap B' \sim A'$ serie B'



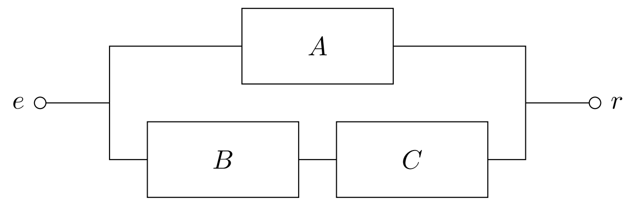
b) $(A \cap B)'$
$(A \cap B)' = A' \cup B' \sim A'$ paralelo B'



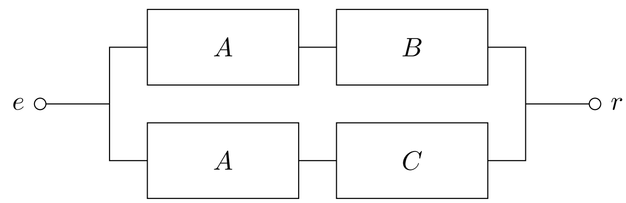
c) $A \cup (B \cap C)$
$A \cup (B \cap C) \sim A$ paralelo (B serie C)



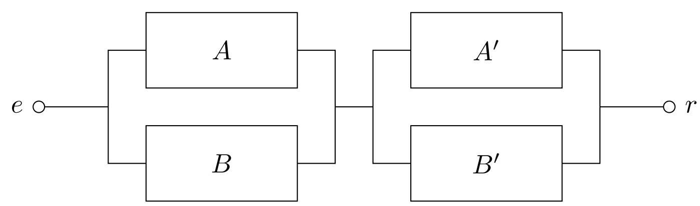
d) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
$(A \cup B) \cap (A \cup C) = (A \cap (A \cup C)) \cup (B \cap (A \cup C))$
$(A \cap (A \cup C)) \cup (B \cap (A \cup C)) = A \cup ((B \cap A) \cup (B \cap C))$
$A \cup (B \cap A) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C) \sim A$ paralelo (B serie C)



e) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \sim$ (A serie B) paralelo (A serie C)



f) $A \triangle B = A \cup B - A \cap B$
$A \cup B - A \cap B = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$
$(A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A \cup B) \cap (A' \cup B') \sim$ (A paralelo B) serie (A' paralelo B')



ii) Diseñar circuitos de los siguientes filtros a partir de los filtros A, B, C, D

a) $\big(D \triangle (A \cap B)\big) - C$

b) $\big((D \cap A) \triangle (D \cap B')\big) \cup \big(A \cap B' \cap (C - D)\big)$

c) $\big(A' \cap B \cap C\big) \triangle \big(D' \cap C\big)$

a) $\big(D \triangle (A \cap B)\big) - C$
$\big(D \cup (A \cap B) - (D \cap (A \cap B))\big) \cap C'$
$\big((D \cup (A \cap B)) \cap (D \cap (A \cap B))'\big) \cap C'$
$\big((D \cup (A \cap B)) \cap (D' \cup (A \cap B)')\big) \cap C'$
$\big((D \cup (A \cap B)) \cap (D' \cup (A' \cup B'))\big) \cap C'$
$\big((D \cup (A \cap B)) \cap (D' \cup A' \cup B')\big) \cap C'$

$\big(($D$ paralelo (A serie B)) serie (D' paralelo A' paralelo B')$\big)$ serie C'

b) $\big((D\cap A)\triangle(D\cap B')\big)\cup\big(A\cap B'\cap(C-D)\big)$
$\big((D\cap A)\cup(D\cap B')-(D\cap A)\cap(D\cap B')\big)\cup\big(A\cap B'\cap(C\cap D')\big)$
$\big(((D\cap A)\cup(D\cap B'))\cap\big((D\cap A)\cap(D\cap B')\big)'\big)\cup\big(A\cap B'\cap(C\cap D')\big)$
$\big(((D\cap A)\cup(D\cap B'))\cap\big((D\cap A)'\cup(D\cap B')'\big)\big)\cup\big(A\cap B'\cap(C\cap D')\big)$
$\big(((D\cap A)\cup(D\cap B'))\cap\big((D'\cup A')\cup(D'\cup B)\big)\big)\cup\big(A\cap B'\cap(C\cap D')\big)$
$\big((D\cap(A\cup B'))\cap\big(D'\cup A'\cup D'\cup B\big)\big)\cup\big(A\cap B'\cap C\cap D'\big)$
$\big((D\cap(A\cup B'))\cap\big(D'\cup A'\cup B\big)\big)\cup\big(A\cap B'\cap C\cap D'\big)$
$\big(D\cap(A\cup B')\cap\big(D'\cup A'\cup B\big)\big)\cup\big(A\cap B'\cap C\cap D'\big)$
$\big(D\cap(A\cup B')\cap\big(D'\cup A'\cup B\big)\big)\cup\big(A\cap B'\cap C\cap D'\big)$

$$\big(D \text{ serie } (A \text{ paralelo } B') \text{ serie } \big(D' \text{ paralelo } A' \text{ paralelo } B\big)\big) \text{ paralelo } \big(A \text{ serie } B' \text{ serie } C \text{ serie } D'\big)$$

c) $\big(A'\cap B\cap C\big)\triangle\big(D'\cap C\big)$
$\big(A'\cap B\cap C\big)\cup\big(D'\cap C\big)-\big(A'\cap B\cap C\big)\cap\big(D'\cap C\big)$
$\big(\big(A'\cap B\cap C\big)\cup\big(D'\cap C\big)\big)\cap\big(\big(A'\cap B\cap C\big)\cap\big(D'\cap C\big)\big)'$
$\big(\big(A'\cap B\cap C\big)\cup\big(D'\cap C\big)\big)\cap\big(\big(A'\cap B\cap C\big)'\cup\big(D'\cap C\big)'\big)$
$\big(\big(A'\cap B\cap C\big)\cup\big(D'\cap C\big)\big)\cap\big(\big(A\cup B'\cup C'\big)\cup\big(D\cup C'\big)\big)$
$\big(\big(A'\cap B\cap C\big)\cup\big(D'\cap C\big)\big)\cap\big(A\cup B'\cup C'\cup D\cup C'\big)$
$\big(\big(A'\cap B\cap C\big)\cup\big(D'\cap C\big)\big)\cap\big(A\cup B'\cup C'\cup D\big)$

$$\big(\big(A' \text{ serie } B \text{ serie } C\big) \text{ paralelo } \big(D' \text{ serie } C\big)\big) \text{ serie } \big(A \text{ paralelo } B' \text{ paralelo } C' \text{ paralelo } D\big)$$

16. Sean $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$. Hallar $A\times A$, $A\times B$, $(A\cap B)\times(A\cup B)$.

$$A\times A=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3)\}$$

$A\times B=\{(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 7),\ (3,\ 1),\ (3,\ 3),\ (3,\ 5),\ (3,\ 7)\}$

$A\cap B=\{1,\ 3\}$

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

$$(A\cap B)\times(A\cup B)=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (3,\ 5),\ (3,\ 7)\}$$

17. Sean A, B y C conjuntos. Probar que

i) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ ii) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

iii) $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$ iv) $(A\triangle B)\times C=(A\times C)\triangle(B\times C)$

i) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

$\Rightarrow)$ $(A\cup B)\times C\subseteq(A\times C)\cup(B\times C)$
$(a,b)\in(A\cup B)\times C$
$a\in(A\cup B), b\in C$
Si $a\in A\ \Rightarrow\ (a,b)\in(A\times C)$
Si $a\in B\ \Rightarrow\ (a,b)\in(B\times C)$

$\Leftarrow)$ $(A\times C)\cup(B\times C)\subseteq(A\cup B)\times C$
$(a,b)\in(A\times C)\cup(B\times C)$
$a\in(A\cup B), b\in C$

ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow)\ & (A \cap B) \times C \subseteq (A \times C) \cap (B \times C) \\
& (a,b) \in (A \cap B) \times C \\
& a \in (A \cap B), b \in C \\
& \text{Si } a \in A \ \Rightarrow\ (a,b) \in (A \times C) \\
& \text{Si } a \in B \ \Rightarrow\ (a,b) \in (B \times C) \\
& \text{Si } a \in A \cap B \ \Rightarrow\ (a,b) \in (A \times C) \cap (B \times C) \\
\Leftarrow)\ & (A \times C) \cap (B \times C) \subseteq (A \cap B) \times C \\
& (a,b) \in (A \times C) \cap (B \times C) \\
& a \in (A \cap B), b \in C
\end{aligned}$$

iii) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

$$\begin{aligned}
(A \cap B^c) \times C &= (A \times C) \cap (B \times C)^c \\
&= (A \times C) \cap \big((B^c \times C) \cup (B \times C^c) \cup (B^c \times C^c)\big) \\
&= (A \times C) \cap (B^c \times C) \\
&= (A \cap B^c) \times C
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
(A \triangle B) \times C &= (A \times C) \triangle (B \times C) \\
(A \cup B - A \cap B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C) - (A \times C) \cap (B \times C) \\
(A \cup B) \times C - (A \cap B) \times C &= (A \cup B) \times C - (A \cap B) \times C
\end{aligned}$$

2 Relaciones

18. Sean $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ y $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$. Verificar si las siguientes son relaciones de A en B y en caso afirmativo graficarlas por medio de un diagrama con flechas de A en B, y por medio de puntos en el producto cartesiano $A \times B$.

i) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(1,7),(3,1),(3,5)\}$

ii) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(2,7),(3,2),(3,5)\}$

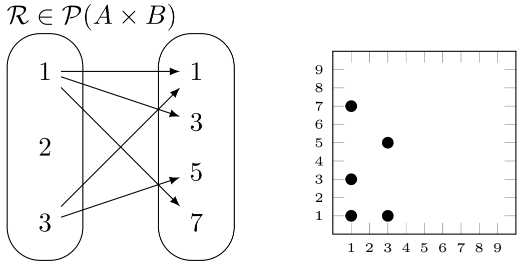
iii) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(2,7),(3,3),(3,5)\}$

iv) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(1,7),(3,1),(3,3),(3,7)\}$

v) $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,7),(3,7)\}$

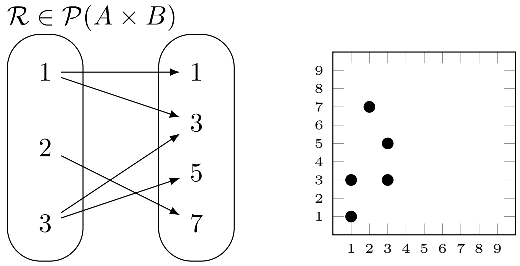
vi) $\mathcal{R} = \{(1,3),(2,1),(3,7)\}$

i) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(1,7),(3,1),(3,5)\}$
$\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$

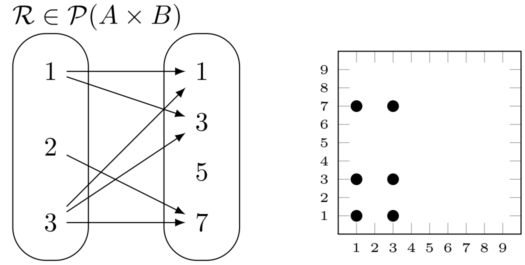


ii) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(2,7),(3,2),(3,5)\}$
$\{(3,\ 2)\} \notin \mathcal{P}(A \times B)$
$\mathcal{R} \notin \mathcal{P}(A \times B)$

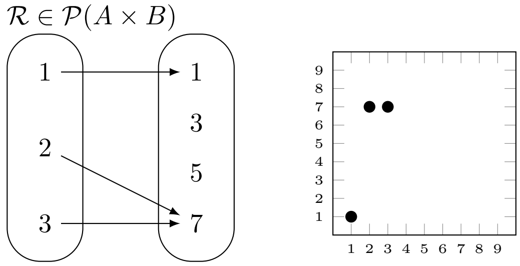
iii) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(2,7),(3,3),(3,5)\}$
$\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$



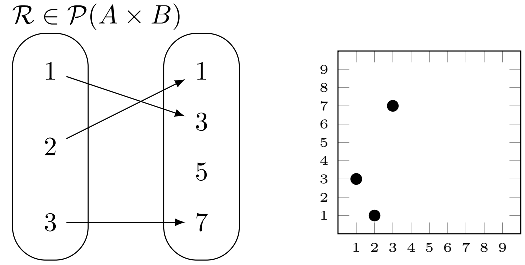
iv) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(1,7),(3,1),(3,3),(3,7)\}$
$\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$



v) $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,7),(3,7)\}$
$\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$



vi) $\mathcal{R} = \{(1,3),(2,1),(3,7)\}$
$\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$



19. Sean $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ y $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$.

Describir por extensión cada una de las relaciones siguientes de A en B:

i) $(a, b) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow a \leq b$	ii) $(a, b) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow a > b$
iii) $(a, b) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow a \cdot b$ es par	iv) $(a, b) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow a + b > 6$

i) $\mathcal{R} = \{(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (1,\ 7),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 7),\ (3,\ 3),\ (3,\ 5),\ (3,\ 7)\}$

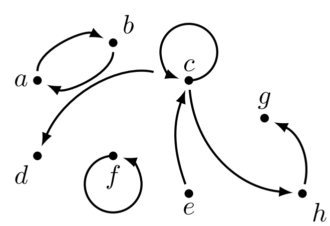
ii) $\mathcal{R} = \{(2,\ 1),\ (3,\ 1)\}$

iii) $\mathcal{R} = \{(2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 7)\}$

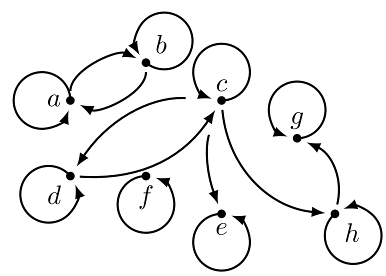
iv) $\mathcal{R} = \{(1,\ 7),\ (2,\ 5),\ (2,\ 7),\ (3,\ 5),\ (3,\ 7)\}$

20. Sea $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

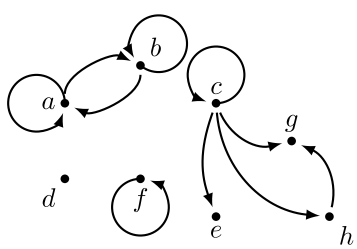
i)



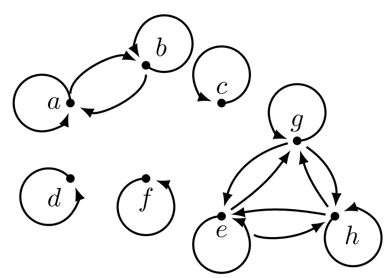
ii)



iii)



iv)



i) $\mathcal{R} = \{(a,\ b),\ (b,\ a),\ (c,\ c),\ (c,\ d),\ (c,\ h),\ (e,\ c),\ (f,\ f),\ (h,\ g)\}$

Ref. $a \not\mathcal{R} a \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ no es reflexiva.

Sim. $c\,\mathcal{R}\,d \wedge d \not\mathcal{R} d \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ no es simétrica.

AnSim. $a\,\mathcal{R}\,b \wedge b\,\mathcal{R}\,a \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ no es antisimétrica.

Trans. $c\,\mathcal{R}\,h \wedge h\,\mathcal{R}\,g \wedge c \not\mathcal{R} g \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ no es transitiva.

ii) $\mathcal{R} = \{(2,\ 1),\ (3,\ 1)\}$

Ref. $\forall x \in A, x\,\mathcal{R}\,x \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ es simétrica.

Sim. $c\,\mathcal{R}\,e \wedge e \not\mathcal{R} c \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ no es simétrica.

AnSim. $a\,\mathcal{R}\,b \wedge b\,\mathcal{R}\,a \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ no es antisimétrica.

Trans. $c\,\mathcal{R}\,h \wedge h\,\mathcal{R}\,g \wedge c \not\mathcal{R} g \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ no es transitiva.

iii) $\mathcal{R} = \{(2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (2,\ 5),\ (2,\ 7)\}$

Ref. $d \not\mathcal{R} d \;\Rightarrow\; \mathcal{R}$ no es reflexiva.

Sim. $c\,\mathcal{R}\,e \wedge e \not\mathcal{R} c \;\Rightarrow\; \mathcal{R}$ no es simétrica.

AnSim. $a\,\mathcal{R}\,b \wedge b\,\mathcal{R}\,a \;\Rightarrow\; \mathcal{R}$ no es antisimétrica.

Trans. $\forall x, y, z \in A, x\,\mathcal{R}\,y \wedge y\,\mathcal{R}\,z \;\Rightarrow\; x\,\mathcal{R}\,z \;\Rightarrow\; \mathcal{R}$ es transitiva.

iv) $\mathcal{R} = \{(1,\ 7),\ (2,\ 5),\ (2,\ 7),\ (3,\ 5),\ (3,\ 7)\}$

Ref. $\forall x \in A, x\,\mathcal{R}\,x \;\Rightarrow\; \mathcal{R}$ es simétrica.

Sim. $\forall x, y \in A, x\,\mathcal{R}\,y \;\Rightarrow\; y\,\mathcal{R}\,x \;\Rightarrow\; \mathcal{R}$ es simétrica.

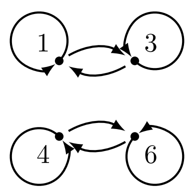
AnSim. $a\,\mathcal{R}\,b \wedge b\,\mathcal{R}\,a \;\Rightarrow\; \mathcal{R}$ no es antisimétrica.

Trans. $\forall x, y, z \in A, x\,\mathcal{R}\,y \wedge y\,\mathcal{R}\,z \;\Rightarrow\; x\,\mathcal{R}\,z \;\Rightarrow\; \mathcal{R}$ es transitiva.

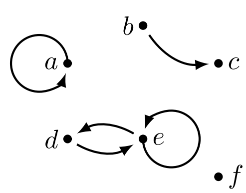
21. Sea $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Graficar la relación

$$R = \{(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 3),\ (6,\ 4),\ (4,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 6)\}$$

como está hecho en el ejercicio anterior.



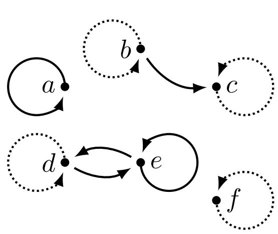
22. Sea $A = a, b, c, d, e, f$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en A representada por el gráfico



Hallar la mínima cantidad de pares que se deben agregar a $\mathcal{R}$ de manera que la nueva relación obtenida sea:

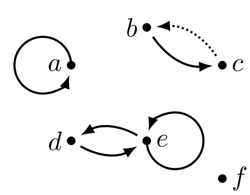
i) reflexiva.	ii) simétrica.	iii) transitiva.
iv) reflexiva y simétrica.	v) simétrica y transitiva.	vi) de equivalencia.

i) reflexiva



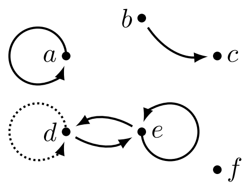
4 pares, $\{(b,\ b),\ (c,\ c),\ (d,\ d),\ (f,\ f)\}$

ii) simétrica



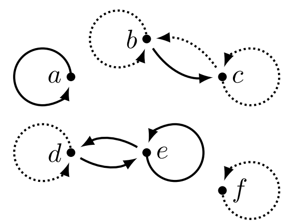
1 par, $\{(c,\ b)\}$

iii) transitiva



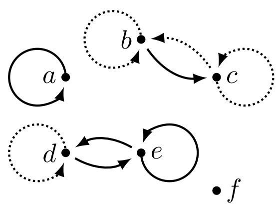
1 par, $\{(d,\ d)\}$

iv) reflexiva y simétrica



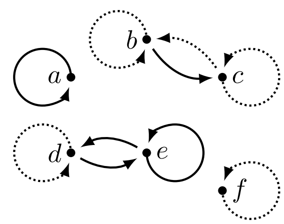
5 pares, $\{(b,\ b),\ (c,\ c),\ (d,\ d),\ (f,\ f),\ (c,\ b)\}$

v) simétrica y transitiva



4 pares, $\{(b,\ b),\ (c,\ c),\ (d,\ d),\ (c,\ b)\}$

vi) de equivalencia



5 pares, $\{(b,\ b),\ (c,\ c),\ (d,\ d),\ (f,\ f)(c,\ b)\}$

23. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

i) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}, \mathcal{R} = \{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5)\}$
ii) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}, \mathcal{R} = \{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5)\}$
iii) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}, \mathcal{R} = \{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 5),\ (1,\ 5)\}$
iv) $A = \mathbb{N}, \mathcal{R} = \{(a,\ b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + b \text{ es par}\}$
v) $A = \mathbb{Z}, \mathcal{R} = \{(a,\ b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |a| \leq |b|\}$
vi) $A = \mathbb{N}, \mathcal{R}$ definida por $a \,\mathcal{R}\, b \iff b$ es múltiplo de a
vii) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{R}$ definida por $X \,\mathcal{R}\, Y \iff X \cap \{1,\ 2,\ 3\} \subseteq Y \cap \{1,\ 2,\ 3\}$

i) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}, \mathcal{R} = \{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5)\}$
$\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.
Por lo tanto también es de equivalencia y de orden.

ii) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}, \mathcal{R} = \{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5)\}$
$\mathcal{R}$ no es reflexiva, faltándole la relación $(6, 6)$, es simétrica, antisimétrica y transitiva.
Al no ser reflexiva no es de equivalencia ni de orden.

iii) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}, \mathcal{R} = \{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 5),\ (1,\ 5)\}$
$\mathcal{R}$ es reflexiva.
$1 \,\mathcal{R}\, 2 \wedge 2 \not{\mathcal{R}}\, 1 \Rightarrow \mathcal{R}$ no es simétrica.
$\mathcal{R}$ es antisimétrica.
$\mathcal{R}$ es transitiva.
Por lo tanto también es de orden pero no de equivalencia.

iv) $A = \mathbb{N}, \mathcal{R} = \{(a,\ b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + b \text{ es par}\}$

reflexiva : $a + a = 2 \cdot a \ \Rightarrow\ a\,\mathcal{R}\,a \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ es reflexiva

simétrica: $a + b = b + a \ \Rightarrow\ (a\,\mathcal{R}\,b \ \Rightarrow\ b\,\mathcal{R}\,a) \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ es simétrica.

antisimétrica: $2\,\mathcal{R}\,4, 4\,\mathcal{R}\,2, 2 \neq 4 \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ no es antisimétrica.

transitiva: $a + b =$ es par, $b + c =$ es par $\Rightarrow$
Si b es par $\Rightarrow\ a, c$ son pares, $2 \cdot n + 2 \cdot m = 2 \cdot (n + m) \ \Rightarrow\ a\,\mathcal{R}\,c$.
Si b es impar $\Rightarrow\ a, c$ son impares, $2 \cdot n + 1 + 2 \cdot m + 1 = 2 \cdot (n + m + 1) \ \Rightarrow\ a\,\mathcal{R}\,c$.
$\mathcal{R}$ es transitiva.

equivalencia: $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva, entonces $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

orden: $\mathcal{R}$ no es antisimétrica entonces $\mathcal{R}$ no es de orden.

v) $A = \mathbb{Z}, \mathcal{R} = \{(a,\ b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |a| \leq |b|\}$

reflexiva : $|a| = |a| \ \Rightarrow\ a\,\mathcal{R}\,a \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ es reflexiva

simétrica: $2\,\mathcal{R}\,3, 3 \not{\mathcal{R}}\, 2 \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ no es simétrica.

antisimétrica: $3\,\mathcal{R} -3, -3\,\mathcal{R}\,3, 3 \neq -3 \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ no es antisimétrica.

transitiva: $|a| \leq |b|, |b| \leq |c| \ \Rightarrow\ |a| \leq |c| \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ es transitiva.

equivalencia: $\mathcal{R}$ no es simétrica entonces $\mathcal{R}$ no es de equivalencia.

orden: $\mathcal{R}$ no es antisimétrica entonces $\mathcal{R}$ no es de orden.

vi) $A = \mathbb{N}, \mathcal{R}$ definida por $a\,\mathcal{R}\,b \Longleftrightarrow b$ es múltiplo de a

reflexiva : $a = a \ \Rightarrow\ a\,\mathcal{R}\,a \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ es reflexiva

simétrica: $6\,\mathcal{R}\,3, 3 \not{\mathcal{R}}\, 6 \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ no es simétrica.

antisimétrica: $a = b \cdot n, b = a \cdot m, n, m \in \mathbb{N}$
$a = (a \cdot m) \cdot n, b = (b \cdot n) \cdot m$
$1 = 1 \cdot m \cdot n, 1 = n \cdot m \Longleftrightarrow n = m = 1 \Longleftrightarrow a = b$
$\mathcal{R}$ es antisimétrica.

transitiva: $a = b \cdot n, b = c \cdot m, n, m \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ a = (c \cdot m) \cdot n \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ es transitiva.

equivalencia: $\mathcal{R}$ no es simétrica entonces $\mathcal{R}$ no es de equivalencia.

orden: $\mathcal{R}$ es reflexiva, antisimétrica, y transitiva, entonces $\mathcal{R}$ es de orden.

vii) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{R}$ definida por $X\,\mathcal{R}\,Y \Longleftrightarrow X \cap \{1,\ 2,\ 3\} \subseteq Y \cap \{1,\ 2,\ 3\}$

reflexiva : $a \cap \{1,\ 2,\ 3\} = a \cap \{1,\ 2,\ 3\} \ \Rightarrow\ a \cap \{1,\ 2,\ 3\} \subseteq a \cap \{1,\ 2,\ 3\} \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ es reflexiva

simétrica: $\varnothing \cap \{1,\ 2,\ 3\} \subseteq \{1\} \cap \{1,\ 2,\ 3\}, \{1\} \cap \{1,\ 2,\ 3\} \not\subseteq \varnothing \cap \{1,\ 2,\ 3\} \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ no es simétrica.

antisimétrica: $\{1\} \cap \{1,\ 2,\ 3\} = \{1,\ 9\} \cap \{1,\ 2,\ 3\}, \{1\} \neq \{1,\ 9\} \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ no es antisimétrica.

transitiva: $a \cap \{1,\ 2,\ 3\} \subseteq b \cap \{1,\ 2,\ 3\}, b \cap \{1,\ 2,\ 3\} \subseteq c \cap \{1,\ 2,\ 3\}$
$a \cap \{1,\ 2,\ 3\} \subseteq c \cap \{1,\ 2,\ 3\} \ \Rightarrow\ \mathcal{R}$ es transitiva.

equivalencia: $\mathcal{R}$ no es simétrica entonces $\mathcal{R}$ no es de equivalencia.

orden: $\mathcal{R}$ no es antisimétrica, entonces $\mathcal{R}$ no es de orden.

24. Sea A un conjunto. Describir todas las relaciones en A que son a la vez:

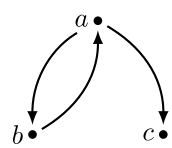
   i) simétricas y antisimétricas ii) de equivalencia y de orden

   ¿Puede una relación en A no ser ni simétrica ni antisimétrica?

i) $\forall x \in A, x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow y \,\mathcal{R}\, x \wedge \forall x \in A, x \,\mathcal{R}\, y, y \,\mathcal{R}\, x \Rightarrow x = y$
$\forall x \in A, x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow x = y$
Sea $\mathcal{R}_{\text{id}}$ la relación identidad, que solo contiene los pares tal que $\forall x, y \in A, (x, y) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow x = y$
Por lo tanto todas las relaciones simétricas y antisimétricas están en $\mathcal{P}(\mathcal{R}_{\text{id}})$

ii) Por ser simétrica y antisimétrica debe estar contenida en $\mathcal{P}(\mathcal{R}_{\text{id}})$
La única de ellas que me garantiza reflexividad es $\mathcal{R}_{\text{id}}$

¿Puede una relación en A no ser ni simétrica ni antisimétrica?



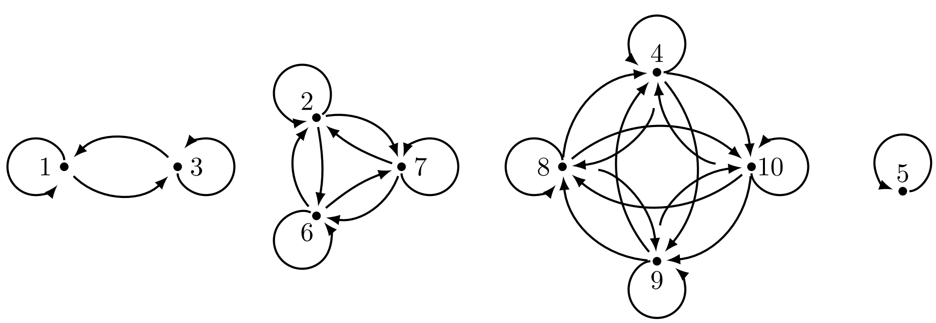
Sí, $a \,\mathcal{R}\, c \wedge c \,\not\mathcal{R}\, a \Rightarrow \mathcal{R}$ no es simétrica.
$a \,\mathcal{R}\, b \wedge b \,\mathcal{R}\, a \Rightarrow \mathcal{R}$ no es antisimétrica.

25. Sea $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$. Dada la relación de equivalencia en A:

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a),(a,f),(f,a),(b,f),(f,b),(c,e),(e,c)\}$$

hallar la clase $\overline{a}$ de a, la clase $\overline{b}$ de b, la clase $\overline{c}$ de c, la clase $\overline{d}$ de d, y la partición asociada a $\mathcal{R}$.
$\overline{a} = \{a,\ b,\ f\}, \overline{b} = \{a,\ b,\ f\}, \overline{c} = \{c,\ e\}, \overline{d} = \{d\}$
Partición $= \{\{a,\ b,\ f\},\ \{c,\ e\},\ \{d\}\}$

26. Sea $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\{\{1,\ 3\},\ \{2,\ 6,\ 7\},\ \{4,\ 8,\ 9,\ 10\},\ \{5\}\}$. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.



Tiene 4 clases de equivalencia, y tomo el menor de cada un como representante.
$\overline{1} = \{1,\ 3\}, \overline{2} = \{2,\ 6,\ 7\}, \overline{4} = \{4,\ 8,\ 9,\ 10\}, \overline{5} = \{5\}$

27. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros, sea la relación de equivalencia dada por la paridad: dos números están relacionados si y solo si tienen la misma paridad (son ambos pares o ambos impares).

    ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar el representante más simple posible para cada clase.

    Como un número es par o impar, todos los números quedaran en una de dos clases, la par y la impar, por lo tanto hay dos clases de equivalencia.

    Los representantes más simples son $\overline{1}$ y $\overline{2}$.

28. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros, sea la siguente relación: dos numeros están relacionados si terminan en el mismo dígito. Verificar que es una relación de equivalencia. ¿Cuantas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar el representante más simple posible para cada clase.

$$\begin{aligned}
\text{reflexiva} &: a = a \Rightarrow \text{ tienen el mismo último dígito } \Rightarrow a \mathcal{R} a \Rightarrow \mathcal{R} \text{ es reflexiva} \\
\text{simétrica:} &\ a \mathcal{R} b, \Rightarrow \text{ tienen el mismo último dígito } \Rightarrow b \mathcal{R} a \Rightarrow \mathcal{R} \text{ es simétrica.} \\
\text{transitiva:} &\ a \mathcal{R} b, b \mathcal{R} c \Rightarrow a \text{ tiene el mismo último dígito que } b \text{ y } b \text{ tiene el mismo último dígito que } c. \\
&\ \text{Entonces } a \text{ tiene el mismo último dígito que } c \Rightarrow \mathcal{R} \text{ es transitiva.} \\
\text{equivalencia:} &\ \mathcal{R} \text{ es reflexiva, simétrica y transitiva, entonces } \mathcal{R} \text{ es de equivalencia.}
\end{aligned}$$

    Los representantes más simples son los dígitos: $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$, $\overline{7}$, $\overline{8}$ y $\overline{9}$.

29. En el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, sea la relación de equivalencia dada por el cardinal (es decir, la cantidad de elementos): dos subconjuntos están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar el representante más simple posible para cada clase.

    Dado que $\forall n \in \mathbb{N} \exists n + 1$, y que $\forall A \subseteq \mathbb{N}, \#(A \cup \{\text{máx}(A) + 1\}) = \#(A) + 1$

    Entonces habrá tantas clases como "números en $\mathbb{N}$" o sea $\mathbb{N}$ clases de equivalencia.

    Luego de representante tomo el cardinal del conjunto, $\overline{A} = \overline{\#(A)}$.

3 Funciones

30. Determinar qué relaciones del ejercicio 18 son funciones de A en B, y qué relaciones del ejercicio 23 son funciones de A en A.

Ejercicio 18

i) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(1,7),(3,1),(3,5)\}$
$1\,\mathcal{R}\,1 \wedge 1\,\mathcal{R}\,3 \;\Rightarrow\; f$ no es una función.

ii) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(2,7),(3,2),(3,5)\}$
$1\,\mathcal{R}\,1 \wedge 1\,\mathcal{R}\,3 \;\Rightarrow\; f$ no es una función.

iii) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(2,7),(3,3),(3,5)\}$
$1\,\mathcal{R}\,1 \wedge 1\,\mathcal{R}\,3 \;\Rightarrow\; f$ no es una función.

iv) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(1,7),(3,1),(3,3),(3,7)\}$
$1\,\mathcal{R}\,1 \wedge 1\,\mathcal{R}\,3 \;\Rightarrow\; f$ no es una función.

v) $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,7),(3,7)\}$
$f(1) = 1, f(2) = 7, f(3) = 7$, f está definida en todo su dominio, f es una función.

vi) $\mathcal{R} = \{(1,3),(2,1),(3,7)\}$
$f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 7$, f está definida en todo su dominio, f es una función.

Ejercicio 23

vii) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}, \mathcal{R} = \{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5)\}$
Es la función identidad.

viii) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}, \mathcal{R} = \{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5)\}$
No está definida $f(6)$, f no es una función.

ix) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}, \mathcal{R} = \{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 5),\ (1,\ 5)\}$
$1\,\mathcal{R}\,1 \wedge 1\,\mathcal{R}\,2 \;\Rightarrow\; f$ no es una función.

x) $A = \mathbb{N}, \mathcal{R} = \{(a,\ b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + b \text{ es par}\}$
$1\,\mathcal{R}\,1 \wedge 1\,\mathcal{R}\,3 \;\Rightarrow\; f$ no es una función.

xi) $A = \mathbb{Z}, \mathcal{R} = \{(a,\ b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |a| \leq |b|\}$
$1\,\mathcal{R}\,2 \wedge 1\,\mathcal{R}\,3 \;\Rightarrow\; f$ no es una función.

xii) $A = \mathbb{N}, \mathcal{R}$ definida por $a\,\mathcal{R}\,b \Longleftrightarrow b$ es múltiplo de a
$1\,\mathcal{R}\,2 \wedge 1\,\mathcal{R}\,3 \;\Rightarrow\; f$ no es una función.

xiii) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{R}$ definida por $X\,\mathcal{R}\,Y \Longleftrightarrow X \cap \{1,\ 2,\ 3\} \subseteq Y \cap \{1,\ 2,\ 3\}$
$\{1\}\,\mathcal{R}\,\{1\} \wedge \{1\}\,\mathcal{R}\,\{1,\ 2\} \;\Rightarrow\; f$ no es una función.

31. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los casos

i) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}, B = \{a,\ b,\ c,\ d\}, \mathcal{R} = \{(1,\ a),\ (2,\ a),\ (3,\ a),\ (4,\ b),\ (5,\ c),\ (3,\ d)\}$

ii) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}, B = \{a,\ b,\ c,\ d\}, \mathcal{R} = \{(1,\ a),\ (2,\ a),\ (3,\ d),\ (4,\ b)\}$

iii) $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{N}, \mathcal{R} = \{(a,\ b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} : a = 2 \cdot b - 3\}$

iv) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}, \mathcal{R} = \{(a,\ b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a + b \text{ es divisible por } 5\}$

i) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}, B = \{a,\ b,\ c,\ d\}, \mathcal{R} = \{(1,\ a),\ (2,\ a),\ (3,\ a),\ (4,\ b),\ (5,\ c),\ (3,\ d)\}$
$3\,\mathcal{R}\,a \wedge 3\,\mathcal{R}\,d \Rightarrow f$ no es una función.

ii) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}, B = \{a,\ b,\ c,\ d\}, \mathcal{R} = \{(1,\ a),\ (2,\ a),\ (3,\ d),\ (4,\ b)\}$
No está definida $f(5) \Rightarrow f$ no es una función.

iii) $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{N}, \mathcal{R} = \{(a,\ b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} : a = 2 \cdot b - 3\}$
$f(2) = b : 2 = 2 \cdot b - 3 \Longleftrightarrow b = 5 \div 2, b \notin \mathbb{N} \Rightarrow f$ no es una función.

iv) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}, \mathcal{R} = \{(a,\ b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a + b \text{ es divisible por } 5\}$
$f(5) = b : 5 + b = 5 \cdot n \Longleftrightarrow b = 5 \cdot (n - 1) \Rightarrow f$ no es una función.

32. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para las que no sean sobreyectivas hallar la imagen.

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 12 \cdot x^2 - 5$

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$

iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, f(x) = (2 \cdot x, x^2, x - 7)$

iv) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

v) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(a, b) = 3 \cdot a - 2 \cdot b$

vi) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, f(x) = f(n) = \begin{cases} 2 \cdot a & \text{si } a > 0 \\ 1 - 2 \cdot a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 12 \cdot x^2 - 5$

Iny: $f(1) = f(-1) = 7 \Rightarrow f$ no es inyectiva.
Sobrey: $x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 12 \cdot x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$
$\text{mín}\left(12 \cdot x^2\right) = 0 \Rightarrow \text{mín}\left(12 \cdot x^2 - 5\right) = -5$
$\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = -10 \Rightarrow f$ no es sobreyectiva.
Biy: f no es inyectiva ni sobreyectiva entonces f no es biyectiva.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$

Iny: $f(x, y) = f(y, x) = x + y \Rightarrow f$ no es inyectiva.
Sobrey: $f(x, 0) = x \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ es sobreyectiva.
Biy: f no es inyectiva entonces f no es biyectiva.

iii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3, f(x)=(2\cdot x, x^2, x-7)$

Iny: $f(x)=(a,b,c), \exists! x \forall c: x-7=c \Rightarrow f$ es inyectiva.

Sobrey: $(2,2,2)\in\mathbb{R}^3, a=2 \iff x=1 \wedge b=2 \iff |x|=\sqrt{2}$
$2\neq\sqrt{2} \Rightarrow f$ no es sobreyectiva.

Biy: f no es sobreyectiva entonces f no es biyectiva.

iv) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par}\\ n+1 & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$

Iny: $f(1)=f(4)=2 \Rightarrow f$ no es inyectiva.

Sobrey: $\forall n\in\mathbb{N}$, si n es par entonces $f(n-1)=n$, si n es impar $f(2\cdot n)=n \Rightarrow f$ es sobreyectiva.

Biy: f no es inyectiva entonces f no es biyectiva.

v) $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, f(a,b)=3\cdot a-2\cdot b$

Iny: $f(1,1)=f(3,4)=1 \Rightarrow f$ no es inyectiva.

Sobrey: $f(a,b)+f(c,d)=3\cdot a+3\cdot c-2\cdot b-2\cdot d=3\cdot(a+c)-2\cdot(b+d)=f(a+c,b+d)$
$f(1,1)=1 \Rightarrow f(n,n)=n\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow f$ es sobreyectiva.

Biy: f no es inyectiva entonces f no es biyectiva.

vi) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}, f(a)=\begin{cases}2\cdot a & \text{si } a>0\\ 1-2\cdot a & \text{si } a\leq 0\end{cases}$

Iny: $\forall n\in\mathbb{N}$, si n es par entonces $\frac{n}{2}\in\mathbb{N}, f(\frac{n}{2})=n$
Si n es impar $\frac{n-1}{2}\in\mathbb{N}, f(-\frac{n-1}{2})=1+2\cdot\frac{n-1}{2}=n \Rightarrow f$ es inyectiva.

Sobrey: Por el mismo argumento es sobreyectiva.

Biy: f es inyectiva y sobreyectiva entonces f es biyectiva.

f^{-1}: $\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$

$$f^{-1}(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par}\\ -\dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$$

$$f\circ f^{-1}(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}\cdot 2 & \text{si } n \text{ es par}\\ 1-2\cdot\left(-\dfrac{n-1}{2}\right) & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}=id_{\mathbb{N}}$$

$$f^{-1}\circ f(a)=\begin{cases}\dfrac{2\cdot a}{2} & \text{si } a>0\\ -\dfrac{(1-2\cdot a)-1}{2} & \text{si } a\leq 0\end{cases}=\begin{cases}a & \text{si } a>0\\ \dfrac{2\cdot a}{2} & \text{si } a\leq 0\end{cases}=id_{\mathbb{Z}}$$

33. i) Dadas las funciones

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=\begin{cases}\dfrac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ es divisible por } 6\\ 3\cdot n+1 & \text{en otro caso}\end{cases} \quad \text{y } g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}, g(n,m)=n\cdot(m+1),$$

calcular $(f\circ g)(3,4), (f\circ g)(2,5), (f\circ g)(3,2)$.

$(f\circ g)(3,4)=f(3\cdot(4+1))=f(15)=3\cdot 15+1=46$

$(f\circ g)(2,5)=f(2\cdot(5+1))=f(12)=\frac{12^2}{2}=72$

$(f\circ g)(3,2)=f(3\cdot(2+1))=f(9)=3\cdot 9+1=28$

ii) Dadas las funciones

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 7\\ 2\cdot x-1 & \text{si } x>7\end{cases} \quad \text{y } g:\mathbb{N}\times\mathbb{R}\to\mathbb{N}, g(n)=\sqrt{n}$$

hallar todos los $n\in\mathbb{N}$ tales que $(f\circ g)(n)=13$ y tales que $(f\circ g)(n)=15$.

$f(x)=13 \iff \begin{cases} x^2=13 & \wedge\, x\le 7\\ 2\cdot x-1=13 & \wedge\, x>7\end{cases} = \begin{cases} |x|=\sqrt{13} & \wedge\, x\le 7\\ x=7 & \wedge\, x>7\end{cases} \iff |x|=\sqrt{13}$

$g(n)=\pm\sqrt{13}\iff n=13$

$(f\circ g)(n)=13\iff n\in\{13\}$

$f(x)=15 \iff \begin{cases} x^2=15 & \wedge\, x\le 7\\ 2\cdot x-1=15 & \wedge\, x>7\end{cases} = \begin{cases} |x|=\sqrt{15} & \wedge\, x\le 7\\ x=8 & \wedge\, x>7\end{cases} \iff \begin{matrix} |x|=\sqrt{15}\\ x=8\end{matrix}$

$g(n)=\pm\sqrt{15}\iff n=15$

$g(n)=8\iff\sqrt{n}=8\iff n=64$

$(f\circ g)(n)=15\iff n\in\{15,\ 64\}$

34. Hallar $f\circ g$ y $g\circ f$ (cuando se puede) en los casos

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2\cdot x^2-18$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x+3$

ii) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=\begin{cases} n-2 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4\\ n+1 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4\end{cases}$ y $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, g(n)=4\cdot n$

iii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}, f(x)=(x+5, 3\cdot x)$ y $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, g(n)=\sqrt{n}$

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2\cdot x^2-18$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x+3$

$f\circ g=f(g(x))=f(x+3)=2\cdot(x+3)^2-18$

$g\circ f=g(f(x))=g(2\cdot x^2-18)=2\cdot x^2-18+3=2\cdot x^2-15$

ii) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=\begin{cases} n-2 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4\\ n+1 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4\end{cases}$ y $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, g(n)=4\cdot n$

$f\circ g=f(g(n))=f(4\cdot n)=4\cdot n-2$

$g\circ f=g(f(n))=\begin{cases} 4\cdot(n-2) & \text{si } n \text{ es divisible por } 4\\ 4\cdot(n+1) & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4\end{cases} = \begin{cases} 4\cdot n-8 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4\\ 4\cdot n+4 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4\end{cases}$

iii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}, f(x)=(x+5, 3\cdot x)$ y $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, g(n)=\sqrt{n}$

$f\circ g=f(g(n))=f(\sqrt{n})=(\sqrt{n}+6, 3\cdot\sqrt{n})$

$g\circ f=g(f(n))$ No se puede calcular, el codominio de f no es igual al dominio de g

35. Hallar dos funciones $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ y $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tales que $f\circ g=id_{\mathbb{N}}$ y $g\circ f\ne id_{\mathbb{N}}$, donde $id_{\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ denota la función identidad del conjunto $\mathbb{N}$.

$$f(n)=\lfloor\sqrt{n}\rfloor \text{ y } g(n)=n^2$$

$f\circ g=f(n^2)=\left\lfloor\sqrt{n^2}\right\rfloor=\lfloor n\rfloor=n \Leftarrow n\in\mathbb{N} \quad f\circ g=id_{\mathbb{N}}$

$g\circ f=g(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)=\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2=n\iff\exists m\in N: m^2=n \quad f\circ g\ne id_{\mathbb{N}}$

36. Sean A, B y C conjuntos. Probar que si $f : B \to C$ y $g : A \to B$ son funciones entonces valen:

   i) si $f \circ g$ es inyectiva entonces g es inyectiva.

   ii) si $f \circ g$ es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva.

   iii) si f y g son inyectivas entonces $f \circ g$ es inyectiva.

   iv) si f y g son sobreyectivas entonces $f \circ g$ es sobreyectiva.

   v) si f y g son biyectivas entonces $f \circ g$ es biyectiva.

i) si $f \circ g$ es inyectiva entonces g es inyectiva.
si g no es inyectiva entonces $\exists a, b \in A : g(a) = g(b), a \neq b$
Luego $f(g(a)) = f(g(b)) \;\Rightarrow\; f \circ g$ no es inyectiva, absurdo.

ii) si $f \circ g$ es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva.
Sea $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $C = \{1,\ 2,\ 3\}$
$g(1) = 1 \quad f(1) = 1 \quad f \circ g(1) = 1$
$g(2) = 2 \quad f(2) = 2 \quad f \circ g(2) = 2$
$g(3) = 3 \quad f(3) = 3 \quad f \circ g(3) = 3$
$f \circ g$ es sobreyectiva, pero g no lo es.

iii) si f y g son inyectivas entonces $f \circ g$ es inyectiva.
f es inyectiva, por lo tanto $\forall a, b \in B, a \neq b \;\Rightarrow\; f(a) \neq f(b)$
g es inyectiva, por lo tanto $\forall c, d \in A, c \neq d \;\Rightarrow\; g(c) \neq g(d)$
Por lo tanto $\forall c, d \in A, g(c) \neq g(d) \;\Rightarrow\; f(g(c)) \neq f(g(d))$

iv) si f y g son sobreyectivas entonces $f \circ g$ es sobreyectiva.
f es sobreyectiva, por lo tanto $\forall c \in C, \exists b \in B : f(b) = c$
g es sobreyectiva, por lo tanto $\forall b' \in B, \exists a \in A : f(a) = b'$
Por lo tanto $\forall c \in C, \exists a \in A : f(g(a)) = c$

v) si f y g son biyectivas entonces $f \circ g$ es biyectiva.
Por iii) y iv) se que si f y g son inyectivas y sobreyectivas $f \circ g$ también que es lo mismo que decir que si f y g son biyectivas entonces $f \circ g$ es biyectiva.

37. Sea B el conjunto de todos los bytes, es decir de todas las expresiones de la forma

$$b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0$$

donde $b_i = 0$ o 1, $0 \leq i \leq 7$, es lo que se llama un bit. Por ejemplo 10100110 y 00000001 son bytes. Se consideran las siguientes funciones de B en B:

i) R (por right): desplaza cada bit un lugar hacia la derecha, pone un 0 en el bit 7 y descarta el bit 0. Por ejemplo $R(10100110) = 01010011$ y $R(00000001) = 00000000$.

ii) L (por left): desplaza cada bit un lugar hacia la izquierda, pone un 0 en el bit 0 y descarta el bit 7. Por ejemplo $L(10100110) = 01001100$ y $L(00000001) = 00000010$.

iii) A_b (por and) efectúa un 'y' lógico ($\wedge$) bit a bit con un byte $b \in B$ dado ($0 \wedge 0 = 0, 0 \wedge 1 = 0, 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1$). Por ejemplo si $b = 11110001, A_b(10100110) = 10100000$ y $A_b(00000001) = 00000001$.

iv) O_b (por and) efectúa un 'o' lógico ($\vee$) bit a bit con un byte $b \in B$ dado ($0 \vee 0 = 0, 0 \vee 1 = 1, 1 \vee 0 = 1, 1 \wedge 1 = 1$). Por ejemplo si $b = 11110001, O_b(10100110) = 11110111$ y $O_b(00000001) = 11110001$.

v) X_b (por xor) efectúa un 'o lógico exclusivo' ($\veebar$) bit a bit con un byte $b \in B$ dado ($0 \veebar 0 = 0, 0 \veebar 1 = 1, 1 \veebar 0 = 1, 1 \veebar 1 = 0$). Por ejemplo si $b = 11110001, X_b(10100110) = 01010111$ y $X_b(00000001) = 11110000$.

Calcular $R \circ L$, $L \circ R$, y dado $b \in B$, $A_b \circ A_b, A_b \circ O_b, O_b \circ A_b, X_b \circ X_b$. Una sola de estas funciones es biyectiva: descubrir cuál y encontrar su inversa.

$$R \circ L = \begin{cases} b_i = b_i & \text{si } 0 \leq i \leq 6 \\ b_i = 0 & \text{si } i = 7 \end{cases}$$

$$L \circ R = \begin{cases} b_i = b_i & \text{si } 1 \leq i \leq 7 \\ b_i = 0 & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

$$A_b \circ A_b = A_b \circ A_b(a) = a_i \wedge b_i \wedge b_i = a_i \wedge b_i = A_b$$

$$A_b \circ O_b = A_b \circ O_b(a) = (a_i \vee b_i) \wedge b_i = b$$

$$O_b \circ A_b = O_b \circ A_b(a) = (a_i \wedge b_i) \vee b_i = b$$

$$X_b \circ X_b = X_b \circ X_b(a) \begin{cases} a_i = 1 & \text{si } a_i = 1 \wedge b_i = 1 \\ a_i = 1 & \text{si } a_i = 1 \wedge b_i = 0 \\ a_i = 0 & \text{si } a_i = 0 \wedge b_i = 1 \\ a_i = 0 & \text{si } a_i = 0 \wedge b_i = 0 \end{cases} = id_B$$

X_b es inyectiva, para todo byte $X_b(a) = X_b(c) \;\Rightarrow\; a_i \veebar b_i = c_i \veebar b_i \iff a_i = c_i \forall i \in \mathbb{N}_0, 0 \leq i \leq 7$

X_b es sobreyectiva, para todo byte $a, c \in B, \exists b \in B : X_b(a) = c$ dado que $a_i \veebar b_i = c_i \iff b_i = a_i \veebar c_i$

X_b es biyectiva.

donde una definición de X_b es : $X_b(a) = \begin{cases} a_i & \text{si } b_i = 0 \\ \neg a_i & \text{si } b_i = 1 \end{cases}$

Por lo tanto $X_b \circ X_b(a) = \begin{cases} a_i & \text{si } b_i = 0 \\ \neg(\neg a_i) & \text{si } b_i = 1 \end{cases} = id_B$

Entonces $X_b = X_b^{-1}$.