

2  
LISTOP

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)  
EXAMEN FINAL  
(27/12/05)

NOMBRE Y APELLIDO:

Nº DE LIBRETA:

Nº DE HOJAS ENTREGADAS:

e-mail:

EL EXAMEN FINAL SE APRUEBA CON 50 PUNTOS

ENUNCIE LAS PROPIEDADES QUE UTILIZA

1. (25 puntos)

(a) Sean  $A$  y  $B$  sucesos de un espacio muestral. Probar que

$$P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$$

(b) Sean  $A_1, \dots, A_n$  eventos de un espacio muestra. Probar que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Sugerencia: Inducción.

2. (25 puntos) Juan y Pinchame combinan para encontrarse en el río entre las 14 y las 15 horas, dando por entendido que ninguno esperará al otro más de 15 minutos. Asumir que iguales intervalos de tiempo tienen asociados iguales probabilidades de llegada y que ambos actúan de forma independiente.

(a) Hallar la probabilidad de que Juan llegue antes que Pinchame.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan y Pinchame se encuentren?

3. (25 puntos)

(a) Probar que si  $\hat{\theta}$  es un estimador insesgado de  $\theta$  y  $V(\hat{\theta}) > 0$  entonces  $(\hat{\theta})^2$  no es un estimador insesgado de  $\theta^2$ .

(b) Sea  $\hat{\theta}$  es un estimador de  $\theta$  y  $b = E(\hat{\theta}) - \theta$  su sesgo. Probar que el error cuadrático medio de  $\hat{\theta}$  vale  $V(\hat{\theta}) + b^2$ .

Obs:  $ECM = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$

4. (25 puntos)

- (a) Supongamos que  $X_1, \dots, X_n$  son v.a. independientes con distribución  $P(\lambda)$  que miden el número de interrupciones que tiene un sistema en un período dado y que el tamaño muestral,  $n$ , es suficientemente grande. Deduzca un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.95 para el número esperado de interrupciones basándose en la muestra dada.
- (b) Sea  $\pi$  la probabilidad de que no haya interrupciones en el período dado. Proponga un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.95 para  $\pi$ .
- (c) Si para una muestra determinada el intervalo hallado en el ítem anterior fuera  $(0.09145, 0.20029)$ , ¿que decisión tomaría al testear las siguientes hipótesis?

$$H_0 : \pi = 0.15 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \pi \neq 0.15$$

¿Con qué nivel tomaría esta decisión? Justificar detalladamente.

