Parcial de Computabilidad

Lógica y Computabilidad

2do cuatrimestre de 2010

Este examen se aprueba obteniendo al menos **50 puntos**. El parcial es a libro abierto y se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras. En el caso de usar resultados de las guías de ejercicios, deben incluirse las demostraciones.

Ejercicio 1. (**20 p.**) Demostrar que toda clase *PRC* se encuentra cerrada por *recursión mutua* entre k funciones. Es decir, dada $\mathcal{C}$, una clase *PRC* y dadas $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g_1, \ldots, g_k : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funciones en $\mathcal{C}$, mostrar que también están en $\mathcal{C}$ las funciones $h_1, \ldots, h_k$ que cumplen:

$$h_i(x,t) = \begin{cases} f_i(x) & \text{si t} = 0 \\ g_i(h_1(x,t-1), \ldots, h_k(x,t-1), x, t) & \text{si no} \end{cases}$$

Ejercicio 2. (**35 p.**) Sea $C = \{\langle \#p, \#q \rangle : \forall x \in (\text{Dom}\Psi_p \cap \text{Dom}\Psi_q)\ \Psi_p(x) = \Psi_q(x)\}$.

I. (**20 p.**) Demostrar que C es no computable.

II. (**15 p.**) Decidir si C es c.e., co-c.e. o ninguno. Justificar.

Ejercicio 3. (**30 p.**) Sea $\text{TOT} = \{\#p : \Psi_p^{(1)} \text{ es total}\}$ e $\text{ID} = \{\#p : \Psi_p^{(1)} \text{ es la función identidad}\}$.

I. (**20 p.**) Usando el Teorema del Parámetro, mostrar que es posible reducir TOT a ID.

II. (**10 p.**) Dado que TOT no es c.e. ni co-c.e., ¿qué se puede decir de ID? (¿es computable? ¿es c.e.? ¿es co-c.e?) Justificar.

Ejercicio 4. (**15 p.**) Sea $A = \text{Dom}\,\Psi_p^{(1)}$ para algún p. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera ó falsa y justificar.

I. (**5 p.**) Si A es finito entonces A es computable.

II. (**5 p.**) Si A es infinito entonces A es no-computable.

III. (**5 p.**) Si A es infinito entonces A es computable.