Parcial de Computabilidad

Lógica y Computabilidad

14 de febrero de 2009

Este examen se aprueba obteniendo al menos **6 puntos**. El parcial es a libro abierto y se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clase, colocando referencias claras. En el caso de usar resultados de las guías de ejercicios, se deben incluir las demostraciones.

Ejercicio 1. (**5 p.**) Dado $k \geq 0$ fijo, sea $B_k = \{\langle x, y\rangle \mid \Phi_x(z) + \Phi_y(z) = k$, para algún $z \in \mathbb{N}\}$.

a) (**2 p.**) Decidir si B_k es un conjunto r.e. y demostrarlo.

b) (**3 p.**) Decidir si $\overline{B_k}$ es un conjunto r.e. y demostrarlo.

Ejercicio 2. (**4 p.**)

a) (**2 p.**) Dado un programa con número p, demostrar que obtener una lista de las etiquetas que *se mencionan en p pero no se definen* es primitivo recursivo. Más formalmente, se pide ver que existe alguna función f que pertenece a la clase de las funciones primitivas recursivas y cumple:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= [l_1, \cdots, l_k] \text{ tal que } \{l_1, \cdots, l_k\} = U_x \setminus D_x, \text{ donde} \\
U_x &= \{A \mid \text{“}[B] \text{ IF } V \neq 0 \text{ GOTO } A\text{” ocurre en } x, \text{ para algún } B\} \\
D_x &= \{A \mid \text{“}[A]\ I\text{” ocurre en } x \text{ para alguna instrucción } I\}
\end{aligned}
$$

En la definición de D_x, I puede ser cualquier instrucción de la forma “$V \leftarrow V$”, “$V \leftarrow V+1$”, “$V \leftarrow V - 1$” ó “IF $V \neq 0$ GOTO L” para cualesquiera V y L.

b) (**2 p.**) Dado un programa con número p, podemos numerar sus instrucciones consecutivamente a partir de 1, siendo la primera p_1 y la última $p_{|p|}$. Sea $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ tal que:

$$
f(x, y, t) = \begin{cases} 1 & \text{si al ejecutar } x \text{ con entrada } y \text{ se visita la } t\text{-ésima} \\ & \text{instrucción de } x. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

Decidir si la función f es computable y demostrarlo.

Ejercicio 3. (**1 p.**)
Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justificar.

Si $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es una función tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la función $g_n(x) = f(n, x)$ es total y computable, entonces f es total y computable.