ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS III
Final / 11-AGO-2021

1. [2.5 puntos] Sea $M \in \mathbb{N}^{m \times n}$ una matriz de números naturales. Se desea obtener un camino que empiece en la casilla superior izquierda ($[1,1]$), termine en la casilla inferior derecha ($[m,n]$), y tal que minimice la suma de los valores de las casillas por las que pasa. En cada casilla $[i,j]$ hay dos movimientos posibles: ir hacia abajo (a la casilla $[i+1,j]$), o ir hacia la derecha (a la casilla $[i,j+1]$).
   (a) Definir una función recursiva que modele el problema. Justificar.
   (b) Diseñar un algoritmo basado en programación dinámica que resuelva este problema.
   (c) Determinar la complejidad del algoritmo propuesto (temporal y espacial). Justificar.

2. [2.5 puntos] Sea G un grafo conexo con pesos asociados a sus aristas. Sean v y w dos vértices distintos de G. Decimos que un camino entre v y w es min-max si minimiza el peso de la arista más pesada del camino (sobre el conjunto de todos los caminos entre v y w que haya en G). Sea T un árbol generador mínimo de G, y sea P el único camino entre v y w que hay en T. Demostrar que P es un camino min-max entre v y w. Es decir, demostrar que para todo camino P' entre v y w que haya en G, el peso de la arista más pesada de P es menor o igual que el peso de la arista más pesada de P'.

3. [2.5 puntos] 3. Dada una red $N = (V,E)$, con función de capacidad $c : E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, fuente s y sumidero t. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es Verdadera o Falsa. Justificar. Recordar que un arco e está saturado por el flujo f si $f(e) = c(e)$.
   (a) Para cualquier flujo máximo entero f y arco e no saturado por f, si se incrementa $c(e)$ en uno, el valor del flujo máximo de N se incrementa.
   (b) Para cualquier flujo máximo entero f y arco e no saturado por f, si se incrementa $c(e)$ en uno, el valor del flujo máximo de N nunca se incrementa.
   (c) Para cualquier flujo máximo entero f y arco e saturado por f, si se incrementa $c(e)$ en uno, el valor del flujo máximo de N se incrementa.
   (d) Para cualquier camino P desde s a t en N, si la capacidad de cada arco en P se incrementa en uno, entonces el valor de flujo máximo de N aumenta.
   (e) Para cualquier camino P desde s a t en N, si la capacidad de cada arco en P se incrementa en uno, entonces el valor de flujo máximo de N aumenta como máximo en uno.

4. [2.5 puntos] Justificar todas las respuestas.
   (a) Dado un problema de decisión Π, si mostramos una reducción polinomial de Π a TSP y otra de TSP a Π, decidir si cada una de las siguientes sentencias se desprenden de estos hechos:
      i. Π es NP-difícil pero no NP-completo.
      ii. Π es NP pero no NP-completo.
      iii. Π es NP-completo.
      iv. Π no es NP-difícil ni NP-completo.
      v. Π está en P.
   (b) Decidir si cada una de las siguientes sentencias es verdadera o falsa:
      i. Un problema $\Pi \in$ NP es NP-completo si puede ser reducido a SAT en tiempo polinomial.
      ii. Un problema $\Pi \in$ NP es NP-completo si SAT puede ser reducido a él en tiempo polinomial.
      iii. Si $NP = co-NP$ entonces $P = NP$.
      iv. Si $NP \neq co-NP$ entonces $P \neq NP$.