Probabilidad y Estadística (Computación) **Examen Final** **16/3/2010**

Nombre y apellido. :......................

Número de libreta.

1	2	3	4	Nota
15	25	20	15	75

7 (siete)

Numere todas las hojas y coloque en cada una su nombre y apellido.

El examen se aprueba con 50 puntos. Deben resolver al menos uno de los ejercicios 1) y 2) y al menos uno de los ejercicios 3) y 4)

1. *(25 puntos)* Considere un proceso de Poisson de intensidad λ , es decir que el número de ocurrencias del evento en un intervalo de longitud t tiene distribución Poisson de parámetro (λt).

   ? *a)* Demuestre que el tiempo de espera hasta la primera ocurrencia del evento (o, equivalentemente, entre dos eventos sucesivos) tiene distribución exponencial.

   b) El número de automóviles que llegan a un centro de verificación vehicular por hora sigue un proceso de Poisson con parámetro $\lambda > 0$. Sean $T_1, T_2, \ldots$ los tiempos entre las llegadas de los autos, de modo que $T_1 + \cdots + T_n$ es el tiempo de llegada del n–ésimo automóvil.

   1) ¿A qué converge en probabilidad $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$ cuando $n \to \infty$. Justifique.
   2) ¿A qué converge en probabilidad $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^2$ cuando $n \to \infty$. Justifique.

2. *(25 puntos)* Sea (X, Y) un vector aleatorio bidimensional tal que existen y son finitas $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ y $V(Y)$.

   a) Defina la covarianza entre X e Y, $cov(X, Y)$, y el coeficiente de correlación lineal, $\rho(X, Y)$.

   b) Pruebe que si a, b, c y d son constantes, $a \neq 0$ y $b \neq 0$, $cov(a\,X + c, b\,Y + d) = a\,b\,cov(X, Y)$.

   c) Pruebe que si $a\,b > 0$, entonces $\rho(a\,X + c, b\,Y + d) = \rho(X, Y)$. ¿Qué pasa si $a\,b < 0$?

   d) Pruebe que si existen constantes a y c, $a \neq 0$ tales que $Y = a\,X + c$, entonces $|\rho(X, Y)| = 1$. ¿Cuándo es $\rho(X, Y) = 1$? ¿Cuándo es $\rho(X, Y) = -1$?

3. *(25 puntos)* Sean $X_1, ..., X_n$ v.a. i.i.d. con función de densidad dada por:

$$f(x) = \frac{x^3}{6\,\theta^4}\, e^{-\frac{x}{\theta}}\, I_{(0,\infty)}(x) \qquad (\theta > 0),$$

   que verifica $E(X) = 4\,\theta$ y $V(X) = 4\,\theta^2$.

   a) Halle el estimador de máxima verosimilitud de θ, $\hat{\theta}_1$.

   b) Verifique que el estimador de momentos de θ, $\hat{\theta}_2$, coincide con $\hat{\theta}_1$ y que es consistente.

   c) Sea $\hat{\theta}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$. Pruebe que no es un estimador insesgado de θ^2. ¿Cuál es el sesgo?

   d) Proponga a partir de $\hat{\theta}_3$ un estimador insesgado de θ^2.