ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS III - 1er Recuperatorio
Fecha examen: 11-DIC-2015 / Fecha notas: 16-DIC-2015

	Nº Orden	Apellido y nombre	L.U.	Cant. hojas[1]
Completar:				
	Nota (Nº)	Nota (Letras)	Docente	
No completar:				

1. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. Demostrar que G tiene al menos $m-(n-1)$ ciclos simples distintos, donde $n = |V|$ y $m = |E|$.

2. Sea G un grafo bipartito. Diseñar un algoritmo eficiente que encuentre un subgrafo completo máximo de G. Mostrar que el algoritmo propuesto es correcto y determinar su complejidad. Justificar. 2 p.

3. Dada una colección de intervalos sobre la recta real, se define su grafo de intervalos como el grafo que tiene un vértice por cada intervalo, y tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si los intervalos correspondientes tienen intersección no vacía. Decimos que G es un grafo de intervalos si y sólo si existe una colección de intervalos tal que G es su grafo de intervalos.

   (a) Demostrar que K_n es un grafo de intervalos para todo $n \in \mathbb{N}$. 0.4 p.

   (b) ¿Es cierto que si G es un grafo de intervalos, entonces todo *subgrafo* de G también lo es? En caso afirmativo demostrar; en caso negativo dar un contraejemplo y justificar. 0.4 p.

   (c) ¿Es cierto que si G es un grafo de intervalos, entonces todo *subgrafo inducido* de G también lo es? En caso afirmativo demostrar; en caso negativo dar un contraejemplo y justificar. 0.4 p.

   (d) Determinar para qué valores de $h \in \mathbb{N}_0$ un árbol binario completo de altura h es un grafo de intervalos. Justificar. 0.8 p.

4. Dado un grafo G, se define la distancia entre dos de sus vértices como el mínimo, sobre todos los caminos que van del primer al segundo vértice, de la cantidad de ejes que hay en el camino, o infinito si tales caminos no existen; además, se define $D(G)$ como el máximo, sobre todos los pares de vértices de G, de la distancia entre esos vértices (diámetro).

   Sea G un grafo no dirigido y G^c su complemento.

   (a) Demostrar que si $D(G)$ es infinito (es decir, G no es conexo) entonces $1 \leq D(G^c) \leq 2$ (en particular, G^c es conexo). 0.6 p.

   (b) Demostrar que si $D(G) \geq 3$ entonces $D(G^c) \leq 3$. 0.6 p.
   SUGERENCIA: Si G es conexo, considerar dos vértices a distancia $D(G)$.

   (c) Demostrar que si G es autocomplementario entonces $D(G) \in \{0, 2, 3\}$. 0.5 p.

   (d) Para cada $k \in \{0, 2, 3\}$ exhibir un grafo autocomplementario cuyo diámetro sea k. Justificar. 0.3 p.

5. Rolando está por jugar a su juego de rol favorito, en el cual existen n personajes. Cada personaje p está caracterizado en el juego por dos atributos enteros positivos $r(p)$ y $s(p)$ que son respectivamente la resistencia y la sabiduría que tiene p. No hay dos personajes con la misma resistencia, ni hay dos personajes con la misma sabiduría. Un personaje p_1 domina a un personaje p_2 si y sólo si $r(p_2) < r(p_1)$ y $s(p_2) < s(p_1)$. Al comenzar la partida Rolando debe elegir el subconjunto de los n personajes que va a utilizar durante el juego. 2 p.

   En una partida reciente Rolando eligió a sus personajes en orden de manera tal que cada uno dominara al anterior. Eso fue aburrido porque durante el juego siempre le convenía utilizar a su personaje más dominante. Para que el juego sea más interesante, esta vez Rolando desea que dentro del subconjunto de personajes que elija, ninguno domine a ningún otro.

   Diseñar un algoritmo que determine la máxima cantidad de personajes que Rolando puede elegir respetando sus deseos. El algoritmo debe tener complejidad temporal $O(n^2)$ y espacial $O(n)$, y estar basado en programación dinámica. La entrada del algoritmo es la cantidad de personajes, y para cada personaje su resistencia y su sabiduría. Mostrar que el algoritmo propuesto es correcto y determinar su complejidad (temporal y espacial). Justificar.

   SUGERENCIA: Ordenar a los personajes por uno de los atributos y pensar cómo quedan ordenados por el otro atributo los subconjuntos deseables. Aplicar programación dinámica sobre los personajes ya ordenados.

[1] Incluyendo a esta hoja. Entregar esta hoja junto al examen.