ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS III - 1$^{\underline{\text{er}}}$ Parcial
Fecha examen: 18-MAY-2013 / Fecha notas: a determinar

No completar:

Nota (Numérica)	Nota (Letras)	Docente

Completar:

Nº Orden	Apellido y nombre	L.U.	Cant. hojas[1]

1. Sea G un grafo. Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos componentes conexas de G. Demostrar que $G_1 = G_2$ o $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

2. Dados dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, un homomorfismo de G_1 a G_2 es una función $f : V_1 \to V_2$ tal que $(v, w) \in E_1 \Rightarrow (f(v), f(w)) \in E_2$. Decimos que G_1 es homomorfo a G_2 si y sólo si existe un homomorfismo de G_1 a G_2.

   Sea C_n el grafo que es un ciclo simple de $n \geq 3$ vértices. Sean p y q enteros tales que $p, q \geq 3$.

   (a) Demostrar que si p y q son pares, entonces C_p es homomorfo a C_q y C_q es homomorfo a C_p.
   (b) Demostrar que si p y q son impares, entonces C_p es homomorfo a C_q si y sólo si $p \geq q$.
   (c) Demostrar que si p es par y q es impar, entonces C_p es homomorfo a C_q pero C_q no es homomorfo a C_p.

3. En la ciudad hay k espías, y cada uno se oculta en una esquina distinta. Es necesario elegir una esquina para que todos los espías se reunan y puedan intercambiar información secreta. Una vez elegida la esquina, la misma será comunicada simultáneamente a todos los espías, quienes se dirigirán hacia ella de inmediato. La reunión comenzará en cuanto todos los espías hayan llegado a la esquina elegida.

   La ciudad está formada por n esquinas y m calles. Cada esquina se identifica por un entero distinto entre 1 y n. Cada calle conecta determinado par de esquinas y se puede recorrer en ambos sentidos. Se puede ir de cualquier esquina a cualquier otra recorriendo las calles, pasando eventualmente por esquinas intermedias. Cada espía tarda exactamente 42 segundos en recorrer cada calle.

   Diseñar un algoritmo eficiente para determinar cuáles esquinas permiten realizar la reunión lo antes posible. La entrada del algoritmo es la cantidad n de esquinas, la cantidad m de calles, la cantidad k de espías, para cada calle las esquinas que conecta, y para cada espía la esquina en la que está oculto. Mostrar que el algoritmo propuesto es correcto y determinar su complejidad. Justificar. El mejor algoritmo que conocemos tiene complejidad $O(km)$.

4. Sea $v = (v_1, v_2, \ldots v_n)$ un vector de números reales positivos, todos distintos entre sí. Decimos que un subconjunto de elementos de v es *independiente* si y sólo si todo par de elementos del subconjunto no aparece en posiciones consecutivas de v. Diseñar un algoritmo eficiente para encontrar un subconjunto de elementos independiente cuya suma sea máxima. Mostrar que el algoritmo propuesto es correcto y determinar su complejidad (temporal y espacial). Justificar. El mejor algoritmo que conocemos tiene complejidad temporal y espacial $O(n)$, y utiliza la técnica de programación dinámica.

5. (a) Sea G un grafo conexo. Sean $T_1 \neq T_2$ dos árboles generadores de G. Demostrar que existen dos ejes e_1 y e_2 tales que e_1 está en T_1 y no en T_2, e_2 está en T_2 y no en T_1, y tanto $T_1 + e_2 - e_1$ como $T_2 + e_1 - e_2$ son árboles generadores de G.

   (b) Sea G un grafo conexo con pesos asociados a sus ejes. Sea $T(G)$ el grafo que tiene a los árboles generadores de G como vértices, y dos árboles generadores son adyacentes si y sólo si cada uno de ellos tiene exactamente un eje que no tiene el otro. A cada vértice de $T(G)$ le asociamos el peso del árbol generador correspondiente de G. Sea T_1 cualquier vértice de $T(G)$, es decir, cualquier árbol generador de G. Demostrar que T_1 es mínimo local si y sólo si es mínimo global. Es decir, demostrar que T_1 tiene peso menor o igual que todos sus vecinos en $T(G)$ si y sólo si es un árbol generador mínimo de G.
   SUGERENCIA: Para la ida tomar un árbol generador mínimo de G que tenga la mayor cantidad posible de ejes en común con T_1, y usar o no el primer punto.

[1] Incluyendo a esta hoja. Entregar esta hoja junto al examen.