Parcial de computabilidad

Lógica y computabilidad

Segundo cuatrimestre de 2018

El examen es a libro abierto y se puede suponer demostrado lo dado en las clases y los ejercicios de las guías colocando referencias claras.

El examen consta de 4 ejercicios de igual valor. Cada ejercicio será calificado con A (aprobado), R (regular) o I (insuficiente), ocasionalmente con un signo - (menos). Para aprobar un parcial es necesario tener al menos dos ejercicios calificados con A o A-. Para promocionar es necesario tener al menos tres ejercicios calificados con A o A- en ambos parciales o sus correspondientes recuperatorios.

Se debe entregar cada ejercicio en hojas separadas. En cada hoja debe figurar nombre, apellido y número de orden. Justificar todas las respuestas.

Ejercicio 1. Sea

$$A = \{\langle x, y\rangle \mid \Phi_x^{(1)} \text{ se indefine sobre toda entrada, y } \mathrm{STP}^{(1)}(0, y, y) = 1\}$$

Decidir si A es computable, solamente c.e., solamente co-c.e., o ninguna.

Ejercicio 2. Decimos (con abuso de notación) que $\Phi_x^{(1)}(y)$ 'termina en k pasos' si el programa P con $\#P = x$ ha terminado tras k pasos de ejecución cuando su única entrada es el valor y, es decir, si $\mathrm{STP}^{(1)}(y, x, k) = 1$.

Decidir si la siguiente función es computable, p.r., o ninguna.

$$f(x) = \begin{cases} f(x-1) + x & \text{si } x > 0 \text{ y } \Phi_x^{(1)}(x) \text{ 'termina en } f(x-1) + x \text{ pasos'} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ejercicio 3. Demostrar que la siguiente función no es computable

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x)\downarrow, \Phi_x^{(2)}(x, y)\downarrow, \text{ y } \Phi_x^{(1)}(x) < \Phi_x^{(2)}(x, y) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Nota: recordar que $\Phi_x^{(1)}(x) = \Phi_x^{(2)}(x, 0)$.

Ejercicio 4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función parcial computable, y $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \Phi_x^{(1)} = f\}$. Entonces existe un subconjunto infinito de A que es computable.

b) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función (no necesariamente parcial computable). Entonces existen funciones p.r. $g_0, g_1, g_2, \ldots$ tales que para todo $i \in \mathbb{N}$ vale que $g_i(x) = f(x)$ para todo $x \leq i$, y además existe una función computable h tal que $\Phi_{h(i)}^{(1)} \equiv g_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Sugerencia: considerar la versión unaria de HALT.