Lógica y Computabilidad - 1er Cuatrimestre 2016
1er Parcial (20/05/2016)

Ejercicio 1. Sea $\varphi(p,q,r)$ el conectivo ternario definido por $\varphi(p,q,r) = p \to (q \to \neg r)$. Decidir si el conjunto de conectivos $\{\varphi\}$ es adecuado.

Solución. En primer lugar observemos que, gracias a un teorema visto en las clases teóricas sabemos que el conjunto de conectores $\{\neg, \vee, \wedge\}$ es un conjunto de conectivos adecuado. Por lo dicho recién basta tan solo con ver que las tablas de verdad de aquellos conectivos son las tablas de verdad de fórmulas hechas a partir de variables $(\{p_1, \dots, p_n, \dots\})$ y el conector φ.

De ahora en más siempre que escribamos v será refiriéndonos a una valuación booleana cualquiera.

Hagamos eso comenzando con $\neg$ (la negación). La tabla de verdad de la negación es la siguiente:

p_1	$\neg p_1$
1	0
0	1

Consideremos entonces la formula $P = \varphi(p_1, p_1.p_1)$, la tabla de verdad de P es

p_1	P
1	0
0	1

$$
\begin{aligned}
v(p_1 \to (p_1 \to \neg p_1) &= \text{máx}\{1 - v(p_1), v(p_1 \to \neg p_1)\} \\
&= \text{máx}\Big\{1 - v(p_1), \text{máx}\{1 - v(p_1), v(\neg p_1)\}\Big\} \\
&= \text{máx}\{1 - v(p_1), 1 - v(p_1), v(\neg p_1)\} \\
&= \text{máx}\{v(1 - v(p_1), 1 - v(p_1), 1 - v(p_1)\} \\
&= 1 - v(p_1),
\end{aligned}
$$

con lo cual P es la fórmula buscada para la negación. De ahora en más podemos utilizar el conectivo $\neg$ para construir fórmulas ya que $\neg A$ para una fórmula A solo será una forma de abreviar $\varphi(A, A, A)$.

En el caso de la $\vee$ (la disyunción), su tabla es

p_1	p_2	$p_1 \vee p_2$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Observemos que $Q = \varphi(\neg p_1, \neq p_2, \neg p_2)$ tiene la misma tabla ya que

$$\begin{aligned}
v(\neg p_1 \to (\neg p_2 \to \neg(\neg p_2))) &= \max\{1 - v(\neg p_1), v(\neg p_2 \to \neq (\neg p_2))\} \\
&= \max\Big\{v(p_1), \max\{1 - v(\neg p_2), v(\neg(\neg p_2))\}\Big\} \\
&= \max\{v(p_1), v(p_2)\} \quad * \\
&= v(p_1 \vee p_2),
\end{aligned}$$

en $*$ usamos que $1 - v(\neg(p_2)) = v(\neg(\neg(p_2))) = v(p_2)$. De ahora en más podemos utilizar el conectivo $\vee$ para construir fórmulas ya que $A \vee B$ para las fórmula A y B solo será una forma de abreviar $\varphi(A, B, \neg B)$. Por último basta observar que $v(A \wedge B) = v(\neg(\neq A \vee \neg B))$ para cualquier par de fórmulas A, B por lo cual la tabla de verdad de $\wedge$ es construible a partir de $\{\neg, \vee\}$ y las variables, lo que, luego de lo hecho hasta recién dice que basta con φ y las variables para construirla.

Ejercicio 2. Para cada fórmula proposicional α que no posee $\to$, denotamos por α^* a la fórmula que se obtiene inductivamente de la siguiente manera:

- Si $\alpha = p_i$ entonces $\alpha^* = \neg p_i$.
- Si $\alpha = \neg\beta$ entonces $\alpha^* = \neg\beta^*$.
- Si $\alpha = \beta_1 \vee \beta_2$ entonces $\alpha^* = \beta_1^* \wedge \beta_2^*$.
- Si $\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2$ entonces $\alpha^* = \beta_1^* \vee \beta_2^*$.

Probar que para toda valuación v se tiene que $v(\alpha) = 1$ si y sólo si $v(\alpha^*) = 0$.

Solución. De ahora en más siempre que escribamos v será refiriéndonos a una valuación booleana cualquiera. Haremos la demostración por inducción en la complejidad de las fórmulas. Si consideramos fórmulas α de complejidad 0, entonces $\alpha \in \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ es decir es una variable, digamos p_i. En este caso $\alpha^* = \neg p_i$, por lo cual $v(\alpha^*) = v(\neg p_i) = 1 - v(p_i) = 1 - v(\alpha)$, y el valor de α es 1 si y sólo si el de α^* es 0. Consideremos como hipótesis inductiva la siguiente: Si la complejidad de α es menor o igual que n entonces $v(\alpha) = 1$ si y sólo si $v(\alpha^*) = 0$. O equivalentemente $v(\alpha) = 1 - v(\alpha^*)$. Sea ahora α de complejidad $n + 1$, luego existen tres posibilidades:

1. $\alpha = \neg\beta$.

2. $\alpha = \beta_1 \vee \beta_2$.

3. $\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2$.

En el caso 1. vale $c(\alpha) = 1 + \beta$ por lo cual $c(\beta) \leq n$ y luego $v(\beta) = 1 - v(\beta^*)$ gracias a la formulación equivalente de la hipótesis inductiva. Además por su construcción inductiva tenemos que $\alpha^* = \neg\beta^*$, y como $\alpha = \neg\beta$ se sigue $v(\beta) = 1 - v(\alpha)$, luego

$$v(\alpha^*) = v(\neg\beta^*) = 1 - v(\beta^*) = v(\beta) = 1 - v(\alpha),$$

que es lo que queríamos probar, al menos en este caso. En los caso 2. y 3. la relación entre complejidades de las fórmulas es $c(\alpha) = 1 + c(\beta_1) + c(\beta_2)$, por lo cual en ambos casos $c(\beta_1), c(\beta_2) \leq n$. Tenemos entonces que $v(\beta_1) = 1 - v(\beta_1^*)$ y $v(\beta_2) = 1 - v(\beta_2^*)$. Enfocados ahora en el caso 2. observemos que $\alpha^* = \beta_1^* \wedge \beta_2^*$, por lo que

$$\begin{aligned} v(\alpha) &= \max\{v(\beta_1), v(\beta_2)\} \\ &= \max\{1 - v(\beta_1^*), 1 - v(\beta_2^*)\} \\ &= 1 - \min\{v(\beta_1^*), v(\beta_2^*)\} \\ &= 1 - v(\beta_1^* \wedge \beta_2^*) = 1 - v(\alpha^*), \end{aligned}$$

como queríamos ver. En el caso 3. vale la igualdad $\alpha^* = \beta_1^* \vee \beta_2^*$, entonces

$$\begin{aligned} v(\alpha) &= \min\{v(\beta_1), v(\beta_2)\} \\ &= \min\{1 - v(\beta_1^*), 1 - v(\beta_2^*)\} \\ &= 1 - \max\{v(\beta_1^*), v(\beta_2^*)\} \\ &= 1 - v(\beta_1^* \vee \beta_2^*) = 1 - v(\alpha^*), \end{aligned}$$

con lo cual tenemos lo que buscamos. Así gracias a la inducción hemos probado que el enunciado es verdadero.

Ejercicio 3. Sea Γ un conjunto de fórmulas proposicionales que satisface la siguiente propiedad:

$$\text{Si } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma \text{ y } \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \gamma \text{ entonces } \gamma \in \Gamma.$$

Probar que $\Gamma = \mathrm{Con}(\Gamma)$.

Solución. El ejercicio nos pide establecer una igualdad entre dos conjuntos, para ello veremos que uno está incluido en el otro y viceversa.

Recordemos que $\mathrm{Con}(\Gamma) = \{\gamma \in \mathrm{Form} : \Gamma \vDash \gamma\}$, es decir, $\mathrm{Con}(\Gamma)$ está formado por las consecuencias semánticas de Γ.

$\underline{\Gamma \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)}$: Esta inclusión siempre es válida y es un ejercicio de la práctica. Para ello tomemos alguien en Γ, llamémoslo $\gamma \in \Gamma$. Ahora, queremos ver que γ es consecuencia semántica de Γ, es decir, si tenemos una valuación que hace verdadera toda fórmula de Γ queremos ver que hace cierta γ. Pero esto es trivialmente cierto, dado que si tenemos una valuación que hace ciertas todas las fórmulas de Γ también debe hacer cierta a γ ya que $\gamma \in \Gamma$.

$\underline{\mathrm{Con}(\Gamma) \subseteq \Gamma}$: Deseamos ver ahora la otra inclusión. Todavía no usamos la hipótesis de la propiedad que satisface Γ, por lo que debiéramos usarla ahora. Sea $\gamma \in \mathrm{Con}(\Gamma)$, entonces tenemos que $\Gamma \vDash \gamma$. Debido al Teorema de Compacidad, sabemos que existe un conjunto finito de fórmulas de Γ que implican semánticamente a γ, es decir, existen fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de Γ tales que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vDash \gamma$. Pero, según la propiedad que tiene Γ, esto nos dice que $\gamma \in \Gamma$, que prueba la inclusión que deseábamos ver.

Como ejercicio adicional, probar que podemos cambiar la propiedad que tiene Γ por la propiedad similar, pero a priori, más débil dada por

$$\text{Si } \alpha, \beta \in \Gamma \text{ tal que} \{\alpha, \beta\} \vDash \gamma \text{ entonces } \gamma \in \Gamma$$

y también obtener en este caso que $\Gamma = \mathrm{Con}(\Gamma)$.

Ejercicio 4. Sean $\mathcal{L} = \langle \{\mathbf{c}\}, \{\mathbf{f}^2\}, \{=\} \rangle$ un lenguaje de primer orden con igualdad (es decir, el símbolo de predicado "=" siempre se interpreta como la relación de igualdad, en particular es reflexivo, simétrico y transitivo) y Γ el siguiente conjunto de enunciados del lenguaje:

$$\Gamma = \{\forall x\, (\mathbf{f}^2(\mathbf{c}, x) = x)\}$$

Probar que $\Gamma \vDash \forall y((\forall x\, \mathbf{f}^2(x, y) = x) \to (y = \mathbf{c}))$.

Solución. Debemos ver que Γ implica semánticamente a dicha fórmula. Aunque podemos plantear el problema semánticamente (es decir, tomar una interpretación arbitraria que satisface Γ y ver que la fórmula anterior también es satisfecha), vamos a resolverlo sintácticamente, por lo que comenzaremos a partir de Γ y *la negación* de la fórmula que buscamos probar y construiremos un árbol de refutación cerrado.

$$\forall x\,(\mathbf{f}^2(\mathbf{c},x)=x)\wedge\neg(\forall y((\forall x\,\mathbf{f}^2(x,y)=x)\rightarrow(y=\mathbf{c})))$$

$$\Big|\ \mathbf{R}_\wedge$$

$$\forall x\,(\mathbf{f}^2(\mathbf{c},x)=x)(*)$$
$$\neg(\forall y((\forall x\,\mathbf{f}^2(x,y)=x)\rightarrow(y=\mathbf{c})))$$

$$\Big|\ \mathbf{R}_{\neg\forall}$$

$$\neg(\forall x\,\mathbf{f}^2(x,\mathbf{c}_0)=x)\rightarrow(\mathbf{c}_0=\mathbf{c}))$$

$$\Big|\ \mathbf{R}_{\neg\rightarrow}$$

$$\forall x\,\mathbf{f}^2(x,\mathbf{c}_0)=x$$
$$\neg(\mathbf{c}_0=\mathbf{c})$$

$$\Big|\ \mathbf{R}_\forall$$

$$\mathbf{f}^2(\mathbf{c},\mathbf{c}_0)=\mathbf{c}$$

$$\Big|\ \mathbf{R}_\forall \text{ de (*)}$$

$$\mathbf{f}^2(\mathbf{c},\mathbf{c}_0)=\mathbf{c}_0$$

$$\Big|\ = \text{es transitivo}$$

$$\mathbf{c}_0=\mathbf{c}$$
$$\times$$

.

Aquí hemos utilizado en el paso 5 la regla $\mathbf{R}_\forall$ a partir del nodo 2 del árbol. El árbol está cerrado dado que se tienen nodos $\mathbf{c}_0=\mathbf{c}$ y $\neg(\mathbf{c}_0=\mathbf{c})$.