PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

Examen Final

13/03/07

Apellido y Nombre	
Nº L.U.	
e-mail	
Carrera	
Nro. hojas entregadas	

El examen final se aprueba con 50 puntos.
Enuncie las propiedades que utiliza.

Ejercicio 1 *(25 puntos)*. Sea (X,Y) un vector aleatorio bidimensional tal que existen y son finitas $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ y $V(Y)$.

a) Defina la covarianza entre X e Y, $\mathrm{cov}(X,Y)$ y el coeficiente de correlación lineal, $\rho(X,Y)$.

b) Pruebe que si a, b, c y d son constantes, a y c distintas de cero,

$$\mathrm{cov}(aX+b, cY+d) = a\,c\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

c) Pruebe que si el producto $a \cdot c$ es mayor que 0, entonces

$\rho(aX+b,$

$$\rho(aX+b, cY+d) = \rho(X,Y)$$

$\rho(X, a\cdot X+b)$

¿Qué pasa si $a \cdot c < 0$?.

2\|2

d) Pruebe que si $Y = aX + b$, entonces $|\rho(X,Y)| = 1$. ¿Cuándo es $\rho(X,Y) = 1$? ¿Cuándo es $\rho(X,Y) = -1$?

signo(a) $\rho(X,X)$ 1

Ejercicio 2 *(25 puntos)*. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias i.i.d con densidad dada por

$$f(x) = \frac{3x^2}{\theta^3} I_{(0,\theta)}(x) \qquad (\theta > 0)$$

9 a) Halle el estimador de máxima verosimilitud de θ.

8 b) ¿ Demuestre que la distribución de $T = \dfrac{\max_{1\le i\le n}(X_i)}{\theta}$ no depende del parámetro θ.

8 c) Halle un intervalo de confianza para θ de nivel exacto $1-\alpha$.

Ejercicio 3 *(25 puntos)*. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 conocido. Se desea testear las hipótesis

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \mu > \mu_0$$

a) Deduzca un test de nivel α para este problema y pruebe que el test propuesto tiene el nivel deseado.

b) Deduzca la función de potencia y exprésela en términos de una función de distribución conocida. Estudie su monotonía y grafíquela.

c) Justifique por qué el test planteado en a) también es adecuado para testear las hipótesis

$$H_o: \mu \leq \mu_o \quad \text{vs} \quad H1: \mu > \mu_o$$

Ejercicio 4 *(25 puntos).* a) Explicite las condiciones que debe satisfacer el experimento asociado a la distribución geométrica y defina la variable aleatoria geométrica X.

b) Explicite el rango de X y deduzca su función de probabilidad puntual y su función de distribución acumulada.

c) Halle la esperanza y la varianza de la v.a. X.

d) Enuncie y demuestre la propiedad de falta de memoria de la distribución geométrica.