# PO Área de Teoría 2017
# Ejercicio de Teoría de Lenguajes

Sebastián Taboh

23 de septiembre de 2017

**Enunciado (Ejercicio 2 de la Práctica 5 del 1C de 2017)**

Dado $L = \{0^i 1^j \mid i > j \vee i \text{ es par}\}$

a) Demostrar que $L$ cumple

$$\forall\ \alpha\ \Big(\big(\alpha \in L \wedge |\alpha| \geq 2\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^i z \in L)\big)\Big)$$

b) Demostrar que $L$ no es regular.

**Contexto**

- Ya vieron en la teórica el Lema de Pumping para lenguajes regulares y otras propiedades de los lenguajes regulares (cerrados por resta, por ejemplo).
- Es un ejercicio que está en la guía de ejercicios, pero podría darse en clase.

**Solución**

a) Sea $\alpha \in L$ tal que $|\alpha| \geq 2$, vamos a ver que ocurre el consecuente analizando por casos:

- $\alpha$ empieza con cero 0s: como no hay descomposición y manejo de los $i$s de modo que la palabra deje de tener cantidad par de 0s (porque van a ser cero), la palabra siempre está para cualquier $i$ y cualquier descomposición.
  Más formalmente, $\alpha = 1^b$ para algún $b \geq 2$ (dado que $|\alpha| \geq 2$).
  Sean $x = \epsilon, y = 1^2, z = 1^{b-2}$. De esta forma, $\forall\ i\ (xy^i z = 1^{2i+(b-2)} = 0^0 1^{2i+(b-2)} \in L)$ dado que hay una cantidad par de 0s.
  Notar que existen otras dos combinaciones de $x, y, z$ tales que $\alpha = xyz \wedge |xy| \leq 2 \wedge |y| \geq 1$, aunque es importante entender que basta con hallar una. Las otras descomposiciones aceptables son:
  - $x = 1, y = 1, z = 1^{b-2}$, en cuyo caso $\forall\ i\ (xy^i z = 1^{1+i+(b-2)})$,
  - y $x = \epsilon, y = 1, z = 1^{b-1}$, valiendo que $\forall\ i\ (xy^i z = 1^{i+(b-1)})$

  En ambos casos, $\forall\ i\ (xy^i z \in L)$ dado que la cantidad de 0s es 0, que es par (usando la notación escribimos que $|xy^i z|_0 = 0$ es par).
- $\alpha$ empieza con sólo un 0 (una cantidad impar de 0s, que es 1), y como está en $L$ tiene cero 1s, dando una palabra que no tiene longitud $\geq 2$.
- $\alpha$ empieza con al menos dos 0s, y hay 2 casos
  - la cantidad de 0s es par, por lo que tomo $y$ como los 2 primeros 0s y para cualquier $i$ va a seguir siendo par.
    O sea, $\alpha = 0^a 1^b$ con:
    - $a = 2a', a' \geq 1$ (porque $a$ es par y $a \geq 2$),
    - $b \geq 0$,
    - $x = \epsilon$,
    - $y = 0^2$,
    - $z = 0^{a-2} 1^b$

Así, se cumple que $\alpha = xyz, |xy| \leq 2, |y| \geq 1$ y como

$$xy^iz = 0^{2i}0^{a-2}1^b = 0^{2(i+a'-1)}1^b \in L$$

se obtiene que $\forall\ i\ (xy^iz \in L)$.

- la cantidad de 0s es impar pero mayor que la de 1s. En ese caso tomo $y$ como un solo 0, es decir:
  - $\alpha = 0^a1^b$ con $a = 2c+1, c \geq 0$ porque $a$ es impar, $a > b$
  - $x = \epsilon$,
  - $y = 0$,
  - $z = 0^{a-1}1^b$

  Entonces
  - si $i = 0$, la cantidad de 0s pasó a ser par y la palabra está en $L$

    $$xy^0z = xz = \epsilon\ 0^{a-1}1^b = 0^{(2c+1)-1}1^b = 0^{2c}1^b \in L$$

  - si $i \geq 1$, sigue habiendo más 0s que 1s y la palabra está en $L$.
    O sea,

    $$\begin{aligned} |xy^iz|_0 &\geq |xyz|_0 \text{ porque } i \geq 1, y = 0 \\ &> |xyz|_1 \text{ dado que sabíamos que la cantidad de 0s en } \alpha = xyz \\ &\qquad\qquad \text{era mayor que la de 1s} \\ &= |xy^iz|_1 \text{ pues } y = 0 \end{aligned}$$

    y por tanto $xy^iz \in L$.

b) Una idea es suponer que $L$ es regular e intentar usar el Lema de Pumping para llegar a un absurdo, ¡pero por $a$) ya sabemos que esto no va a pasar porque de hecho existe ese $n$, 2 por ejemplo!

Es importante entender que esto no constituye un absurdo porque el Lema de Pumping para Lenguajes regulares da la implicación de que existe un $n$, no dice que si existe un $n$ el lenguaje es regular.

No pudiendo usar el Lema de Pumping directamente con $L$, buscamos otros recursos.

Escribimos $L$ como la siguiente unión disjunta:

$$L = \{0^i1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\} \,\dot{\cup}\, \{0^i1^j \mid i \text{ es par}\}$$

$\Big($ OJO: por más que es cierto que $L = \{0^i1^j \mid i > j\} \ \cup\ \{0^i1^j \mid i \text{ es par}\}$, al restar $\{0^i1^j \mid i \text{ es par}\}$ no nos habría quedado $\{0^i1^j \mid i > j\}$ dado que la intersección es no vacía, y quizás habría sido más difícil probar que el lenguaje resultante de la resta no fuera regular. $\Big)$

Es sencillo ver que esta igualdad vale.

Llamemos

- $L_1 = \{0^i1^j \mid i > j \wedge i \text{ es impar}\}$
- $L_2 = \{0^i1^j \mid i \text{ es par}\}$

Podemos ver que $L_2$ es regular (construir un autómata es sencillo, pero también podemos dar la expresión regular $(00)^*1^*$ ), y además $L - L_2 = L_1$. Ahora, suponiendo que $L$ es regular, $L_1 = L - L_2$ debe ser un lenguaje regular porque tanto $L$ y $L_2$ lo son y los lenguajes regulares están cerrados por resta.

Veamos que $L_1$ no es regular para concluir que $L$ no lo es.

Supongamos que sí y usemos el Lema de Pumping: existe $n$ tal que

$$\forall\ \alpha\ \Big(\big(\alpha \in L_1 \wedge |\alpha| \geq n\big) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^iz \in L_1)\big)\Big)$$

Sea $\alpha = 0^{2n+1}1^{2n}$. Como $2n+1$ es impar y $2n+1 > 2n$, sabemos que $\alpha \in L_1$. También es claro que $|\alpha| \geq n$. Así,

$$\exists x\ \exists y\ \exists z\ \big(\alpha = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |y| \geq 1 \wedge \forall\ i\ (xy^iz \in L_1)\big)$$

Notemos que como $|xy| \leq n \wedge |y| \geq 1$, $x$ sólo puede tener 0s e $y$ va a tener 0s y sólo va a tener 0s (digamos que $y = 0^m$ con $m \geq 1$).

Consideremos $xz$, que es como $\alpha$ pero con al menos un 0 menos.

$$xz = 0^{|x|}0^{2n+1-|x|-m}1^{2n} = 0^{2n+1-m}1^{2n}$$

Como $m \geq 1$, $|xz|_0 = 2n+1-m \leq 2n = |xz|_1$ y por tanto $xz \notin L_1$ (porque no tiene más 0s que 1s). Se concluye que $L_1$ no es regular.

## Puntos importantes del ejercicio

- Fijar el Lema de Pumping
  - dice que existe alguna descomposición, no que todas tienen que cumplir
  - es una implicación, no un si y sólo si
- Ver que no siempre se puede probar usando el Lema de Pumping que un lenguaje no es regular, justamente porque no es un si y sólo si y a veces vale el consecuente sin que valga el antecedente. En esos casos, a veces hay que darle ciertas vueltas de tuercas para llegar a usar el Lema, o directamente probar otros caminos.
- Esas otras vueltas de tuercas justamente pueden ser las propiedades que también se apunta a que se fijen, como por ejemplo las operaciones por las que está cerrado el conjunto de lenguajes regulares.
- Es importante entender el análisis por casos.
  Cuando algo tiene que darse para toda $\alpha$, entonces los casos tienen que cubrir todas las posibilidades (cantidad par e impar de 0s, etc.).
  Cuando vimos que había tres descomposiciones posibles pero bastaba con encontrar alguna (en el primer ítem del inciso a)), no era necesario (y no siempre va a ser posible) verificar que en todos los casos la palabra bombeada pertenecía a $L$.