Examen Final de Análisis Matemático I

Juan Manuel Perez Bertoldi
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

23 de Diciembre del 2014

1. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x, y)| \leq |xy| + y^2$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Probar que f es diferenciable en $(0, 0)$ y hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el origen.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en todo su dominio. Sea v un vector de $\mathbb{R}^2$ tal que $||v|| = 1$. Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial v}(P) = 0 \ \forall P \in \mathbb{R}^2$. Probar que
$$f(Q + tv) = f(Q) \quad \forall Q \in \mathbb{R}^2 \quad y \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$. Probar que si f alcanza un máximo o mínimo local en el punto P entonces se cumple que $\nabla f(P) = (0, 0)$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función integrable. Sea D el cuadrado de vértices $(-1, 0)$,$(1, 0)$,$(0, 1)$ y $(0, -1)$. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que cumple la siguiente propiedad: $f(x, y) = g(x - y) \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Probar que
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_{-1}^{1} g(v)dv$$

1. Primero vamos a probar que $f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$:

   - $f(0,0)$
   $$0 \leq |f(x,y)| \leq |xy| + y^2$$
   $$0 \leq |f(0,0)| \leq |00| + 0^2$$
   $$0 \leq |f(0,0)| \leq 0$$
   $$\Rightarrow f(0,0) = 0$$
   - $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h}$$
   Veamos que este límite da 0:
   $$0 \leq |\frac{f(h,0)}{h}| \leq \frac{|h0| + 0^2}{h} = 0$$
   $$\Rightarrow |\frac{f(h,0)}{h}| = 0$$
   $$\Rightarrow \lim_{h\to 0} |\frac{f(h,0)}{h}| = 0$$
   $$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = 0$$
   $$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$
   - $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h}$$
   Veamos que este límite da 0:
   $$0 \leq |\frac{f(0,h)}{h}| \leq \frac{|0h| + h^2}{|h|} = \frac{h^2}{|h|} = |h|$$
   $$\Rightarrow \lim_{h\to 0} 0 = 0 \leq \lim_{h\to 0} |\frac{f(0,h)}{h}| \leq \lim_{h\to 0} |h| = 0$$
   $$\Rightarrow \lim_{h\to 0} |\frac{f(0,h)}{h}| = 0$$
   $$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = 0$$
   $$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

El plano tangente a f en el origen viene dado por:

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y$$

Entonces, $z = 0$ es el plano tangente que buscamos, teniendo en cuenta lo demostrado anteriormente.

Resta probar que la f es diferenciable en el origen.

La función f es diferenciable en el $(0,0)$ si se cumplen las siguientes dos condiciones:

a) $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{||(x,y)||} = 0$

Ya vimos que el ítem a) se cumple puesto que ambas derivadas parciales valen 0. Veamos que también se cumple la condición b):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{||(x,y)||} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{||(x,y)||}$$

$$0 \leq |\frac{f(x,y)}{||(x,y)||}| = \frac{|f(x,y)|}{||(x,y)||} \leq \frac{|xy| + y^2}{||(x,y)||} \leq \frac{2||(x,y)||^2}{||(x,y)||} = 2||(x,y)||$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |\frac{f(x,y)}{||(x,y)||}| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2||(x,y)|| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} |\frac{f(x,y)}{||(x,y)||}| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{||(x,y)||} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{||(x,y)||} = 0$$

$\Rightarrow f$ es diferenciable en el $(0,0)$.

2. Como f es diferenciable en todo su dominio sabemos que el gradiente existe en todo punto de $\mathbb{R}^2$ y además se cumple que:

$$\frac{\partial f}{\partial k}(Q) =< \nabla f(Q); k >$$

donde k es un vector cualquiera de norma 1 y $Q \in \mathbb{R}^2$. En particular se verifica que:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(Q) =< \nabla f(Q); v >= 0$$

Además, f es diferenciable y $\mathbb{R}^2$ es *convexo* por lo que podemos aplicar el Teorema del Valor Medio tomando los puntos de $\mathbb{R}^2$ $Q + tv$ y Q:

$$f(Q+tv)-f(Q) =< \nabla f(C); Q+tv-Q >=< \nabla f(C); tv >= t < \nabla f(C); v >$$

donde C es un punto comprendido en el segmento que une a los puntos $Q + tv$ y Q.

Como $C \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial v}(C) =< \nabla f(C); v >= 0$

$$\Rightarrow t < \nabla f(C); v >= t0 = 0$$

$$\Rightarrow f(Q + tv) - f(Q) = 0$$

$$\Rightarrow f(Q + tv) = f(Q)$$

3. sea $P = (a, b)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que f alcanza un máximo local en P.

$$\Rightarrow f(x, y) \leq f(a, b) \quad \forall (x, y) \in B_\delta(P)$$

donde $B_\delta(P)$ es la bola abierta de centro P y radio δ. Consideremos la función $g : (a - \delta, a + \delta) \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x, b)$. g es derivable en a, pues es una composición de funciones diferenciables.

$g(a) = f(a, b)$ y $g(x) = f(x, b)$. Como $x \in (a - \delta, a + \delta), f(x, b) \leq f(a, b) \Rightarrow g(x) \leq g(a)$. Entonces, g alcanza un máximo local en a. $\Rightarrow g'(a) = 0$.

Veamos que $g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$:

Aplicando la regla de la cadena obtenemos el siguiente resultado:

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, b) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, b) \cdot 0$$

$$\Rightarrow g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

Pero sabíamos que $g'(a) = 0$. Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$$

Análogamente, consideremos la función $h : (b-\delta, b+\delta) \to \mathbb{R}$ tal que $h(y) = f(a,y)$. h es derivable en b, pues es una composición de funciones diferenciables.

$h(b) = f(a,b)$ y $h(y) = f(a,y)$. Como $y \in (b-\delta, b+\delta), f(a,y) \leq f(a,b) \Rightarrow h(y) \leq h(b)$. Entonces, h alcanza un máximo local en b. $\Rightarrow h'(b) = 0$.

Veamos que $h'(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$:

Aplicando la regla de la cadena obtenemos el siguiente resultado:

$$h'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,y) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x}(a,y) \cdot 0$$

$$\Rightarrow h'(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

Pero sabíamos que $h'(b) = 0$. Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

$$\Rightarrow \nabla f(P) = (0,0)$$

4. Las rectas que delimitan la región D son $y = x+1$, $y = -x+1$, $y = -x-1$ y $y = x-1$. Sea $u = x+y$ y sea $v = x-y$. Consideremos la transformación $T(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}; \frac{u-v}{2}\right)$.Sea $T_1(u,v) = \frac{u+v}{2}$ y sea $T_2(u,v) = \frac{u-v}{2}$. T transforma a la región D en el cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$.

   $D_{T_{(u,v)}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial u} & \frac{\partial T_1}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial T_2}{\partial u} & \frac{\partial T_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

   $\Rightarrow |J_{T_{(u,v)}}| = \frac{1}{2}$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D g(x-y)dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(T_{(u,v)}) \cdot |J_{T_{(u,v)}}|du\right) dv =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} g(\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}) \cdot \frac{1}{2}du\right) dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} g(v)du\right) dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} du \cdot \int_{-1}^{1} g(v)dv = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_{-1}^{1} g(v)dv = \int_{-1}^{1} g(v)dv$$