LUCIANO
TARJIA

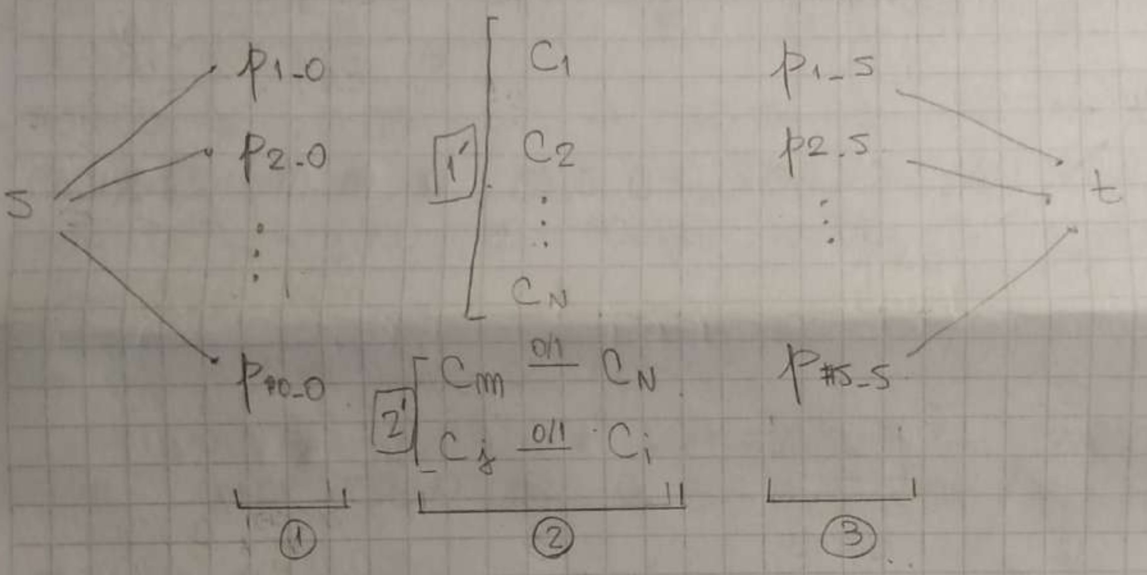
(1) P. PERSONAS → P_0 SOMBRA] A UN EXTREMO DE LA
→ P_S AL SOL] SOGA C/U

SOGAS → ATÓMICA (INDIVISIBLE)
→ COMPUESTA (UNIÓN DE 2 ATÓMICAS O 1 COMP. Y 1 ATÓMICA)
→ FINAL (UNA COMPUESTA SUJETADA X 2 PERS)

CADA p PERSONA TIENE UNA SOGA MONOCROMÁTICA DE COLOR c_p

HAY SOGAS BICOLOR.

a) PODEMOS PENSARLO COMO UN PROBLEMA DE FLUJO DE LA SIGUIENTE FORMA.



LAS CAPACIDADES SON TODAS = A 1.

CONECTAMOS S CON LOS VÉRTICES DE (1), SIENDO ESTOS LAS PERSONAS A LA SOMBRA. LUEGO, UNO A CADA PERSONA DE LA SOMBRA CON UN VÉRTICE DE (2), SIENDO ESTOS LOS COLORES.

LA PARTE (2) SON TODOS LOS COLORES POSIBLES, Y UNO A UNO PERSONA p_{m-0} A UN COLOR c_i DE $\boxed{1'}$ SI LA PERSONA TIENE UNA SOGA DE COLOR c_i

Y LA PARTE $\boxed{2'}$ SON LOS COLORES $c_j - c_i$ QUE SE PUEDEN CONECTAR USANDO M SOGAS MULTICOLOR QUE HAGAN POSIBLE LA UNIÓN. UNO UNA PERSONA A UN COLOR c_j SI TIENE UNA SOGA DE ESE COLOR

FINALMENTE UNO LOS COLORES A LAS PERSONAS AL SOL (LAS DE LA PARTE ③) USANDO LOS MISMOS CRITERIOS RECIÉN DICHOS

Y POR ÚLTIMO UNO A LAS PERSONAS DE ③ A t.

CON ESTE MODELADO, LO ÚNICO QUE HAY QUE HACER ES CALCULAR EL FLUJO MAX.

b) CON ESTE ALGORITMO, UNA PERSONA SE PUEDE UNIR A UNA DEL SOL SOLO SI PUEDEN UNIR SUS SOGAS DE FORMA "LEGAL", Y LO PUEDE HACER SOLO CON UNA.

ADEMÁS CALCULANDO EL FLUJO MÁXIMO SE OBTIENE LA MAYOR CANTIDAD POSIBLE DE PAREJAS, QUE ES LO QUE SE QUIERE.

LA COMPLEJIDAD DEL ALGORITMO ES $O(n \cdot m)$ SIENDO

n = CANTIDAD DE VÉRTICES Y

m = CANTIDAD DE ARISTAS

n = #PERSONAS + #COLORES + #COMBINACIONES DE COLORES

$\leq (\#\text{PERSONAS})^2 \times 3$

m = #PERSONAS + [#COLORES + #COMB COLORES] × 2 + #COMB DE COLORES

$\leq (\#\text{PERSONAS})^2 \times 4$

$\Rightarrow O((\#\text{PERSONAS})^4)$.

LUCIANO
TARSIA

HOJA N° 2

FECHA

(2)

a) PROBAR $\chi'(G) = \chi(L(G))$

OBS: $\chi'(G)$ DENOTA AL MENOR NÚMERO DE COLORES CON QUE SE PUEDEN COLOREAR LAS ARISTAS DE UN GRAFO, MIENTRAS QUE $\chi(G)$ A LOS VÉRTICES

DE ESTA MANERA NOTEMOS QUE RESOLVER $\chi'(G)$ ES LO MISMO QUE RESOLVER $\chi(L(G))$, ESTO SE DEBE A QUE

- EN $\chi(G')$ DOS ARISTAS CON UN VÉRTICE COMÚN NO PUEDEN TENER EL MISMO COLOR.

EN $L(G)$, CADA ARISTA PASA A SER UN VÉRTICE, QUE ES ADY A OTRO, SI LAS ARISTAS QUE REPRESENTAN COMPARTIAN ALGÚN VÉRTICE EN G.

- DEBIDO A ESTO, SI LA ARISTA e_1 NO PUEDE TENER EL MISMO COLOR QUE e_2 EN G, XQ COMPARTEN UN VÉRTICE, TAMPOCO LO PODRÁN HACER v_1 Y v_2 EN $L(G)$ XQ SERÁN ADY.

$\Rightarrow$ UN COLOREO VÁLIDO DE ARISTAS EN G, ES UN COLOREO VÁLIDO DE VÉRTICES EN $L(G)$ SI SE LE ASIGNA EL COLOR DE CADA $e_i \in G$, A CADA $v_i \in L(G)$.

$\Rightarrow \chi'(G) = \chi(L(G))$.

b) $\chi'(G) \times \nu(G) \geq |E_G|$

TENEMOS ARISTAS PINTADAS DE $\chi'(G)$ COLORES

PODEMOS TOMAR EL CONJ. A DE ARISTAS DEL MISMO COLOR MÁS GRANDE, DIGAMOS DE TAMAÑO #A

$\Rightarrow \chi'(G) \times \#A \geq |E_G|$

AHORA, NOTEMOS QUE A DEFINE UN MATCHING VÁLIDO, YA QUE CADA ARISTA DE A, NO COMPARTE UN VÉRTICE EN COMÚN CON NINGUNA OTRA. PERO ESTE MATCHING DEFINIDO POR A NO TIENE XQ SER MÁXIMO

$\Rightarrow \chi'(G) \times \nu(G) \geq \chi'(G) \times \#A \geq |E_G|$.

c) PARTIENDO DE

$$\chi'(G) \times \nu(G) \geq |E_G| \overset{(2)}{\Rightarrow} \chi(L(G)) \times \nu(G) \geq |E_G|$$

$$\Rightarrow \boxed{\chi(L(G)) \geq |E_G| / \nu(G)}$$

$\nu(G)$ NO PUEDE SER 0, YA QUE ESO SIGNIFICARÍA QUE G NO TIENE ARISTAS (SIEMPRE SE PUEDE TOMAR UNA SOLA ARISTA COMO MATCHING), Y SI ESE ES EL CASO $L(G)$ ES UN GRAFO SIN VÉRTICES NI ARISTAS

(3)

a)

⇒) SI G TIENE UN CLIQUE DE TAMAÑO K

⇒ TIENE UN CONJUNTO A_1 DE VÉRTICES QUE TODOS SE RELACIONAN CON TODOS EN G ($\#A_1 = K$)

⇒ EN $\overline{G}$, A_1 ES UN CONJ. DE VÉRTICES QUE NINGUNO SE RELACIONA CON NINGUNO.

⇒ EN $\overline{G}+\overline{G}$ A_1 ESTÁ DUPLICADO, ENTONCES ESTÁN A_1 Y A_2, TODOS LOS VÉRTICES DE A_1 SE RELACIONAN CON LOS DE A_2 Y VICEVERSA, Y NINGÚN VÉRTICE DE A_1 SE RELACIONA CON OTRO DE A_1 (ANÁLOGO CON A_2)

⇒ A_1 Y A_2 SON PARTICIONES DE UN GRAFO BIPARTITO COMPLETO, CADA UNO $\#A_1 = \#A_2 = K$

⇒ TAMAÑO DE BICLIQUE $= 2K$.

⇐) TENEMOS $\overline{G}+\overline{G}$ QUE TIENE UN BICLIQUE DE TAMAÑO $2K$

⇒ EN $\overline{G}$ VA A HABER, SI O SI (*), UNA PARTICIÓN DE TAMAÑO K DEL BIPARTITO.

⇒ ESA PARTICIÓN, DIGAMOS A, ES UN CONJ DE VÉRTICES TAL QUE NINGÚN $v \in A$ ES ADY A NINGÚN $w \in A$ ($v \neq w$)

⇒ ESO DEFINE UN COMPLETO DE TAMAÑO K EN G

⇒ G TIENE UN CLIQUE DE TAMAÑO K.

(*) EL SI O SI SE DEBE A QUE

→ PUEDEN ESTAR AMBAS PARTICIONES EN UN SOLO $\overline{G}$

→ O UNA EN CADA LADO

Y SI ESTÁN AMBAS EN UN SOLO $\overline{G}$ TIENEN QUE TENER EL MISMO TAMAÑO SINO NO SE CUMPLE LO QUE SE DEMUESTRA.

b) BICLIQUE NP-COMPLETO.

1) BICLIQUE ES NP

REPRESENTACIÓN DE LA ENTRADA: EL GRAFO SE REPRESENTA CON SU MATRIZ DE ADY.

REPRESENTACIÓN DEL CERTIFICADO

2 VECTORES, REPRESENTANDO CADA PARTICIÓN DEL BIPART., TAL QUE LA SUMA DE SU TAMAÑO SEA IGUAL A M, CON UN NÚMERO DEL 0 A M-1 EN CADA POSICIÓN Y SIN COMPARTIR VALORES ENTRE ELLOS

ALGORITMO: PARA CADA VALOR DEL VECTOR A_1, ME FIJO QUE ES ADYACENTE A TODOS LOS DE A_2 Y A NINGUNO DE A_1

```
FLAG = TRUE
PARA CADA i EN A1        // CADA ELEMENTO DEL VECTOR A1
|  PARA CADA J EN A1
|  |  IF (MATRIZ[i][J] == 1 ∧ i ≠ J)
|  |  |  FLAG = FALSE
|  PARA CADA J EN A2      // LA OTRA PARTICIÓN
|  |  IF (MATRIZ[i][J] == 0 ∨ i = J)
|  |  |  FLAG = FALSE
PARA CADA i EN A2
|  PARA CADA J EN A2
|  |  IF (MATRIZ[i][J] == 1 ∧ i ≠ J)
|  |  |  FLAG = FALSE
|  PARA CADA J EN A1
|  |  IF (MATRIZ[i][J] == 0 ∨ i = J)
|  |  |  FLAG = FALSE
RETURN FLAG
```

COMO SE VE LA COMPLEJIDAD ESTÁ ACOTADA POR $O(M^2)$ Y VERIFICA, MEDIANTE EL FLAG, QUE TODO VÉRTICE DE A_1 SEA ADY A TODO DE A_2 Y VICEVERSA, Y QUE TODO VÉRTICE DE A_1 NO SEA ADY A NINGÚN VÉRTICE DE A_1 (LO MISMO CON A_2). SI ESTO NO SE CUMPLE, EL FLAG = FALSE

LUCIANO
TARSIA.

AHORA NECESITAMOS VER QUE $\Pi_1 \leq_p \Pi_2$

USANDO QUE.

Π_1 CLIQUE.

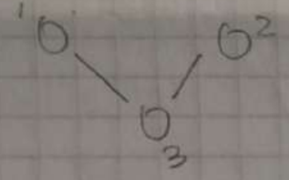
Π_2 BICLIQUE

TRANSFORMACIÓN.

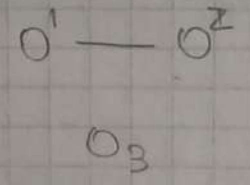
PODEMOS TOMAR LA MATRIZ DE ADY. DE G, COMPLEMENTARLA Y HACER $\overline{G}+\overline{G}$.

NOTEMOS QUE ESTO ES POLINOMICO, YA QUE COMPLEMENTAR ES CAMBIAR LOS 0 POR 1 Y LOS 1 POR 0. (*) Y HACER LA SUMA ES PONER BLOQUES COMPLETOS DE 1'S.

EJEMPLO:

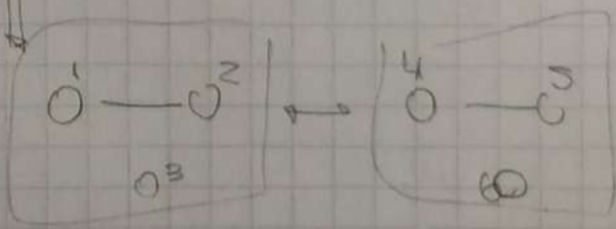
G = 

$\Rightarrow$

$\overline{G}$ = 

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

$\overline{G}+\overline{G}$ 

(*) SALVO EN LA DIAGONAL, AHÍ QUEDAN LOS 0'S.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TODO ESTO ES DE COMPLEJIDAD CUADRÁTICA $(O(n^2))$.

Y CUMPLE QUE PARA TODA INSTANCIA I DE Π_1

$RESP(I) = SI \iff RESP(f(I)) = SI$

POR LO PROBADO EN A.

$\Rightarrow$ BICLIQUE ES NP-COMPLETO.

LUCIANO
TARSIA

5

(4)

a) UN GRAFO ES CONEXO $\Rightarrow$ TODOS SUS VÉRTICES TIENEN GRADO PAR.

PARTIENDO DE G, PODEMOS TOMAR TODOS LOS VÉRTICES CON GRADO IMPAR Y JUNTARLOS DE A PARES (DADO QUE $\sum d(n) = 2m$, LOS VÉRTICES DE GRADO IMPAR VIENEN DE A DOS). A CADA PAR LOS UNIMOS CON ARISTAS, Y ESE CONJUNTO DE ARISTAS SERÁ $E(H)$

ASÍ, $(V(G), E(G) \cup E(H))$ ES EULERIANO Y $E(H)$ UN "MATCHING" YA QUE NINGUNA ARISTA SOBRECARGA AL MISMO VÉRTICE.

b) PROBÉMOSLO POR EL ABS., SUPONGAMOS QUE $|X| < |H|$ DE ESTA MANERA, VAN A QUEDAR 2 O MÁS VÉRTICES DE GRADO IMPAR EN G, CON GRADO IMPAR EN $(V(G), E(G) \cup X)$, Y ENTONCES $(V(G), E(G) \cup X)$ NO VA A SER EULERIANO. ABS

$|X| \geq |H|$.

d) LA FAMILIA DE GRAFOS DONDE TODOS LOS VÉRTICES TIENEN GRADO IMPAR

EJEMPLO:

c) SI EL GRAFO SE REPRESENTA CON LISTAS DE ADY. SABER EL GRADO DE UN VÉRTICE ES $O(1)$

ASÍ, PODEMOS ITERAR EN $O(N)$ SOBRE TODOS LOS VÉRTICES Y QUEDARNOS CON LOS DE GRADO IMPAR. ESE CONJUNTO DE VÉRTICES DETERMINARÁ LAS ARISTAS JUNTANDO DE A PARES LOS VÉRTICES DEL CONJUNTO, CUALQUIER COMBINACIÓN SIRVE.

Correcciones:

Te informo que tu nota del segundo parcial de la materia es **aprobado**.

Fueron entregados todos los ejercicios.

Para los cuales te dejo unas observaciones:

- En el caso del primer ejercicio el modelado del problema no es el correcto, no muestra el concepto de soga compuesta, por ejemplo. Recordar que proponer el modelo es parte del ejercicio pero también el explicar por qué resuelve el problema planteado, lo es.
- El resto de los ejercicios se encuentran bien, solo te menciono/corrijo el ejercicio 4 d), donde hay que proponer una familia de grafos. Vos propones los grafos donde todos los nodos son de grado impar. Hacé una observación de lo que sucede con el grafo K 3,3.