FINAL DE ÁLGEBRA I
(03-08-22)

N. I.

"En su llama mortal la luz te envuelve."
Pablo Neruda

Ejercicio 1

Calcular la cantidad de funciones inyectivas $f : \{1, ..., 20\} \to \{1, ..., 50\}$ tales que $f(1) < f(3)$ y $f(2) < f(3)$.

Resolución:

Al elegir tres elementos x_1, x_2 y x_3 del conjunto $\{1, ..., 50\}$, que será denominado "codominio" a partir de este momento, para que sean imágenes de los elementos 1, 2 y 3 del conjunto $\{1, ..., 20\}$, que será denominado "dominio" a partir de este momento, hay una sola forma de ordenarlos de menor a mayor. Supongamos que $x_1 < x_2 < x_3$. Luego, hay dos formas distintas de asignarles, a través de una función $f : \{1, ..., 20\} \to \{1, ..., 50\}$, a 1, 2 y 3 los elementos x_1, x_2 y x_3 de manera tal que f sea inyectiva, $f(1) < f(3)$ y $f(2) < f(3)$: una de ellas es $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$ y $f(3) = x_3$, y la otra es $f(1) = x_2$, $f(2) = x_1$ y $f(3) = x_3$. Motivo por el cual, teniendo en cuenta que la cantidad de formas distintas de elegir tres elementos distintos del codominio es $\binom{50}{3}$, y que por cada una de tales elecciones tenemos dos formas distintas de enviar 1, 2 y 3 a x_1, x_2 y x_3 para que todas las condiciones se satisfagan, el producto $2\binom{50}{3}$ será parte de la respuesta final.

Luego de haber definido las imágenes de 1, 2 y 3, resta hacer lo mismo con las imágenes de los elementos restantes del dominio, que son 17 ($17 = 20 - 3$). Como las funciones deben ser inyectivas, las imágenes de 1, 2 y 3 no pueden ser imágenes de otros elementos, por lo tanto quedan en el codominio 47 elementos ($47 = 50 - 3$) que sí pueden ser imágenes de los restantes elementos del dominio. La cantidad de formas distintas de asignarle a 17 elementos imágenes de un conjunto de 47 elementos de manera inyectiva es $\frac{47!}{(47-17)!} = \frac{47!}{30!}$.

Finalmente, como hay $2\binom{50}{3}$ formas distintas de asignarle imágenes a 1, 2 y 3, y por cada una de ellas hay $\frac{47!}{30!}$ formas distintas de asignarle imágenes a los elementos restantes del dominio, siempre cumpliendo todas las condiciones, hay $2\binom{50}{3}\frac{47!}{30!}$ funciones inyectivas $f : \{1, ..., 20\} \to \{1, ..., 50\}$ tales que $f(1) < f(3)$ y $f(2) < f(3)$.

$\blacksquare$

Ejercicio 2

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por

$$a_1 = 42,\ a_2 = 90\ y\ a_n = 3a_{n-1} + (29^n - 11^n)a_{n-2}\ si\ n \geq 3.$$

Probar que $(6^n : a_n) = 2 \cdot 3^n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Resolución:

Usamos inducción. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, la afirmación dada por

$$P(n) : (6^n : a_n) = 2 \cdot 3^n.$$

Veamos que vale $P(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 1$ resulta $(6 : a_1) = (6 : 42) = 6 = 2 \cdot 3$, así que $P(1)$ es verdadera.

Si $n = 2$ resulta $(6^2 : a_2) = (36 : 90) = 18 = 2 \cdot 3^2$, así que $P(2)$ es verdadera.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Supongamos verdaderas $P(n-2)$ y $P(n-1)$, y veamos que lo es $P(n)$. La afirmación $P(n)$ es verdadera si y sólo si $2 \mid a_n$, $4 \nmid a_n$ y $3^n \mid a_n$ (notar que $6^n = 2^n \cdot 3^n$).

Por hipótesis inductiva tenemos que $2 \mid a_{n-2}$, $4 \nmid a_{n-2}$ y $3^{n-2} \mid a_{n-2}$ (por ser $P(n-2)$ verdadera), y $2 \mid a_{n-1}$, $4 \nmid a_{n-1}$ y $3^{n-1} \mid a_{n-1}$ (por ser $P(n-1)$ verdadera).

En primer lugar, tenemos que

$$2 \mid a_n \leftrightarrow a_n \equiv 0\ (mod\ 2) \leftrightarrow 3a_{n-1} + (29^n - 11^n)a_{n-2} \equiv 0\ (mod\ 2)$$

, lo que vale pues, por H. I., resulta $a_{n-2} \equiv 0\ (mod\ 2)$ y $a_{n-1} \equiv 0\ (mod\ 2)$, y por lo tanto

$$3a_{n-1} + (29^n - 11^n)a_{n-2} \equiv 3 \cdot 0 + (29^n - 11^n) \cdot 0 \equiv 0\ (mod\ 2).$$

Luego, $2 \mid a_n$.

En segundo lugar, tenemos que

$$4 \nmid a_n \leftrightarrow a_n \not\equiv 0\ (mod\ 4) \leftrightarrow 3a_{n-1} + (29^n - 11^n)a_{n-2} \not\equiv 0\ (mod\ 4)$$

$$\leftrightarrow 3a_{n-1} + (1^n - (-1)^n)a_{n-2} \not\equiv 0\ (mod\ 4).$$

Luego, si n es par, resulta

$$4 \nmid a_n \leftrightarrow 3a_{n-1} + (1-1)a_{n-2} \not\equiv 0 \ (mod\ 4) \leftrightarrow 3a_{n-1} \not\equiv 0 \ (mod\ 4)$$

$$\leftrightarrow a_{n-1} \not\equiv 0 \ (mod\ 4)$$

, que vale por H. I. (usamos en la última equivalencia que 3 y 4 son coprimos). Por otro lado, si n es impar, resulta

$$4 \nmid a_n \leftrightarrow 3a_{n-1} + (1+1)a_{n-2} \not\equiv 0 \ (mod\ 4) \leftrightarrow 3a_{n-1} + 2a_{n-2} \not\equiv 0 \ (mod\ 4)$$

$$\leftrightarrow 3a_{n-1} \not\equiv 0 \ (mod\ 4)$$

(pues por H. I., $2 \mid a_{n-2}$, y por lo tanto $4 \mid 2a_{n-2}$)

$$\leftrightarrow a_{n-1} \not\equiv 0 \ (mod\ 4)$$

, que vale por H. I.
Luego, $4 \nmid a_n$.

En tercer y último lugar,

$$3^n \mid a_n \leftrightarrow a_n \equiv 0 \ (mod\ 3^n) \leftrightarrow 3a_{n-1} + (29^n - 11^n)a_{n-2} \equiv 0 \ (mod\ 3^n)$$

$$\leftrightarrow (29^n - 11^n)a_{n-2} \equiv 0 \ (mod\ 3^n)$$

(pues por H. I., $3^{n-1} \mid a_{n-1}$, que implica que $3^n \mid 3a_{n-1}$). Entonces, basta ver que $9 \mid 29^n - 11^n$, pues por H. I. tenemos que $3^{n-2} \mid a_{n-2}$. Pero,

$$9 \mid 29^n - 11^n \leftrightarrow 29^n - 11^n \equiv 0 \ (mod\ 9) \leftrightarrow 2^n - 2^n \equiv 0 \ (mod\ 9) \leftrightarrow 0 \equiv 0 \ (mod\ 9)$$

, que vale.
Luego, $3^n \mid a_n$.

Probados los casos base y el paso inductivo, se concluye que $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

Ejercicio 3

Sea $w \in G_{15}$ tal que $w \notin G_3$ y $w \notin G_5$. Hallar el argumento de z, donde

$$z = (2 + w^3 + \overline{w}^3 + w^6 + \overline{w}^6 + i(2 + w^5 + w^{-5}))^{31}.$$

Resolución:

Definimos

$$u := 2 + w^3 + \overline{w}^3 + w^6 + \overline{w}^6 + i(2 + w^5 + w^{-5}).$$

Luego, $z = u^{31}$, y además

$$\begin{aligned}
u &= 2 + w^3 + (w^{-1})^3 + w^6 + (w^{-1})^6 + i(2 + w^5 + w^{-5}) \\
&= 2 + w^3 + w^{-3} + w^6 + w^{-6} + i(2 + w^5 + w^{-5}) \\
&= 2 + w^3 + w^{12} + w^6 + w^9 + i(2 + w^5 + w^{10}) \\
&= 1 + 1 + w^3 + w^6 + w^9 + w^{12} + i(1 + 1 + w^5 + w^{10}) \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{4}(w^3)^k + i(1 + \sum_{k=0}^{2}(w^5)^k) \\
&= 1 + \frac{(w^3)^5 - 1}{w^3 - 1} + i(1 + \frac{(w^5)^3 - 1}{w^5 - 1}) \\
&= 1 + \frac{w^{15} - 1}{w^3 - 1} + i(1 + \frac{w^{15} - 1}{w^5 - 1}) \\
&= 1 + \frac{1 - 1}{w^3 - 1} + i(1 + \frac{1 - 1}{w^5 - 1}) = 1 + i
\end{aligned}$$

, donde los denominadores son no nulos pues por hipótesis $w \notin G_3$ y $w \notin G_5$. Entonces, $z = (1 + i)^{31}$. Luego,

$$z = (1 + i)^{31} = (|1 + i|e^{i\frac{\pi}{4}})^{31} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{31} = (\sqrt{2})^{31}e^{i\frac{31\pi}{4}} = (\sqrt{2})^{31}e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

, lo que implica que $arg(z) = \frac{7\pi}{4}$.

■

Ejercicio 4

Factorizar el polinomio

$$3X^2 + 210X + 5 \in (\mathbb{Z}/239\mathbb{Z})[X]$$

como producto de polinomios irreducibles en $(\mathbb{Z}/239\mathbb{Z})[X]$ (239 es un número primo).

Resolución:

Sea $f := 3X^2 + 210X + 5$. Se sabe que un polinomio cuadrático es reducible en $(\mathbb{Z}/239\mathbb{Z})[X]$ si y sólo si su discriminante Δ (en este caso $\Delta = \overline{210}^2 - \overline{4} \cdot \overline{3} \cdot \overline{5}$) es un cuadrado en $\mathbb{Z}/239\mathbb{Z}$ (ver la Proposición 7.3.1 del libro hecho para la materia por Teresa Krick). Luego,

$$210^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 44100 - 60 = 44040 = 184 \cdot 239 + 64 = 184 \cdot 239 + 8^2$$

, lo que implica que $210^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 \equiv 8^2$ $(mod\ 239)$, así que Δ es un cuadrado en $\mathbb{Z}/239\mathbb{Z}$ ($\Delta = \overline{8^2} = \overline{8}^2$). Las raíces de tal polinomio vienen dadas por

$$x_1 := \frac{-\overline{210} + \overline{8}}{\overline{2} \cdot \overline{3}} \quad y \quad x_2 := \frac{-\overline{210} - \overline{8}}{\overline{2} \cdot \overline{3}}.$$

Luego,

$$x_1 := \frac{-\overline{210}+\overline{8}}{\overline{2}\cdot\overline{3}} = \frac{\overline{-202}}{\overline{6}} = \frac{\overline{37}}{\overline{6}} = \overline{37}\cdot\overline{6}^{-1} = \overline{37}\cdot\overline{40} = \overline{1480} = \overline{46}$$

, donde para calcular $\overline{6}^{-1}$ se resuelve ecuación de congruencia $6X \equiv 1\ (mod\ 239)$, pues $\overline{6}\cdot\overline{X} = \overline{1}$ si y sólo si $6X \equiv 1\ (mod\ 239)$. Por otro lado,

$$x_2 := \frac{-\overline{210}-\overline{8}}{\overline{2}\cdot\overline{3}} = \frac{\overline{-218}}{\overline{6}} = \frac{\overline{21}}{\overline{6}} = \overline{21}\cdot\overline{6}^{-1} = \overline{21}\cdot\overline{40} = \overline{840} = \overline{123}.$$

Entonces,

$$f = 3(X-46)(X-123)$$

es la factorización de f por polinomios irreducibles en $(\mathbb{Z}/239\mathbb{Z})[X]$.

$\blacksquare$