

10 (diez)

1	2	3	4
24	25	25	24

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)  
EXAMEN FINAL  
(20/02/07)

98

NOMBRE Y APELLIDO: Hernán Rodríguez Ureta  
 N° DE LIBRETA: 668/28 N° DE HOJAS ENTREGADAS: 5  
 e-mail: Herudu@hotmail.com

EL EXAMEN FINAL SE APRUEBA CON 50 PUNTOS  
 ENUNCIE LAS PROPIEDADES QUE UTILIZA

1. (25 puntos) Sean  $X$  e  $Y$  v.a. independientes con distribución Geométrica de parámetro  $p$ .
- (a) Halle la distribución de la v.a.  $X + Y$ .
  - (b) Halle  $P(X = k | X + Y = n)$ . ¿ Para qué valores de  $n$  y  $k$  está definida esta probabilidad?.
  - (c) Pruebe la propiedad de falta de memoria de la distribución geométrica, es decir: Si  $X$  tiene distribución Geométrica de parámetro  $p$ , entonces

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t) \quad \forall t \text{ y } s \in \mathbb{N}$$

2. (25 puntos)

- (a) En general, pruebe que  $P(E \cap F) \geq P(E) + P(F) - 1$ , siendo  $E$  y  $F$  dos eventos cualesquiera.
- (b) Demuestre que la probabilidad de que ocurra exactamente uno de los eventos  $E$  y  $F$  es

$$P(E) + P(F) - 2P(E \cap F).$$

3. (25 puntos) Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a. i.i.d. con densidad dada por

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x) \quad (\theta > 1)$$

- (a) Halle la media de una variable aleatoria con densidad  $f_\theta(x)$ .
- (b) Halle el estimador de momentos de  $\theta$ .
- (c) Halle el estimador de máxima verosimilitud de  $\theta$ .
- (d) Pruebe que ambos estimadores son consistentes.

4. (25 puntos) Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a. i.i.d. con distribución  $E(\lambda)$  suponga que se desea realizar un test de hipótesis para testear

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad vs \quad H_1 : \lambda > \lambda_0.$$

- (a) Deduzca un test de nivel exacto  $\alpha$  para decidir entre las dos hipótesis.
- (b) Calcule la función de potencia del test planteado en a) para todo  $\lambda_1$  y exprésela en términos de alguna función de distribución conocida.
- (c) ¿Cuánto valdría la función de potencia si  $\alpha = 0.05$ ,  $n=5$ ,  $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = 1.4$ ? ¿En base a este resultado le parece razonable el test para detectar un  $\lambda_1$  tal que  $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = 1.4$ ?

