1	2	3	4	Nota
B-	B-	R	B	A

Tema 1

Turno: ☐ 11-14 (A-K) ☒ 11-14 (L-Z) ☐ 16-19 ☐ 20-22 LuMiJu ☐ 20-22 MaMiVi

Apellido y nombre: ....

Carrera: ....L.U.: ..

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Primer cuatrimestre – 2018

Primer parcial - 12/05/18

---

1. Hallar, si existen, el supremo y el ínfimo del conjunto

$$A = \left\{ (-1)^m + \frac{3}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. Decidir si la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{yx^2+xy^3} - 1}{x^2 + |x+2|y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + x^2 y}{2y^2} & \text{si } y \neq 0; \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

(*a*) Hallar, si existen, las derivadas direccionales de f en el origen para todo vector $v \in \mathbb{R}^2$, con $\|v\| = 1$.

(*b*) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \frac{9}{5}, \quad \text{para } v = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right),$$

y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la función definida como $g(t) = \big(\operatorname{sen}(t), (1+t)e^t\big)$.
Sabiendo que $(f \circ g)(t) = e^t$, hallar la ecuación del plano tangente a f en $(0,1)$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

HOJA 1
TEMA 1

2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{yx^2+xy^3}-1}{x^2+|x+2|y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f es continua para todo $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ por ser suma y producto de continuas.

Hay que analizar la continuidad en el $(0,0)$.

Para que sea continua en $(0,0)$, debe existir $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, y éste debe ser igual a $f(0,0) = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{yx^2+xy^3}-1}{x^2+|x+2|y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y+xy^3}-1}{x^2y+xy^3} \cdot \frac{x^2y+xy^3}{x^2+|x+2|y^2}$$

$$\underset{\text{Por álgebra de límites}}{=} \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y+xy^3}-1}{x^2y+xy^3}}_{C.1} \cdot \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+xy^3}{x^2+|x+2|y^2}}_{C.2}$$

ESTO SÓLO PUEDE AFIRMARSE SI YA SABES QUE AMBOS LÍM. EXISTEN. HASTA ENTONCES, ESTA AFIRMACIÓN ES PROVISORIA.

C1

Como $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t} = 1 \Rightarrow$ El límite de $C_1 = 1$ POR REGLA DE COMPOSICIÓN

Como $(x,y)\to(0,0)$ $\Rightarrow (x^2y+xy^3)\to 0$ (y llamo $x^2y+xy^3 = t$)

C.2

Hago el límite por definición

Dado $\varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ tal que $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{x^2y+xy^3}{x^2+|x+2|y^2} - 0 \right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{x^2y+xy^3}{x^2+|x+2|y^2}\right| \leq \frac{|x^2y|+|xy^3|}{|x^2+|x+2|y^2|} \leq \frac{|x|^2|y|+|x||y|^3}{|x^2+y^2|} \leq \frac{\|(x,y)\|^3+\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^2} \leq \|(x,y)\|+\|(x,y)\|^2$$

$|x| < \delta$ Tomo $\delta = 1$

$-1 < x < 1$

$1 < x+2 < 3$

$1 < x+2 \leq |x+2|$

$(*)$ $\|(x,y)\|+\|(x,y)\|^2 < \delta+\delta^2 < \delta(1+\delta) < \delta 2 < \varepsilon$

$\delta < \varepsilon/2$

SIGUE EN LA OTRA HOJA

ESTO PRUEBA QUE

Basta tomar $\delta = \min\left\{1; \varepsilon/2\right\}$. ~~Para que~~ el límite de C_2 sea 0

$\Rightarrow$ Por álgebra de límites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{yx^2+xy^3}-1}{x^2+|x+2|y^2} = 1 \cdot 0 = 0$$

Como el límite existe y es igual a $f(0,0)=0$, entonces la función es continua para $(0,0)$ y para todo $\mathbb{R}^2$

3) (a)

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+x^2y}{2y^2} & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y=0 \end{cases}$$

$v=(v_1,v_2)$ tq $\|v\|=1$ en el origen

Para calcular todas las derivadas direccionales en el origen debo calcular el sig. límite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv+(0,0))-f(0,0)}{t}$$

$f(0,0)=0$

SOLO SI $V_2 \neq 0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{(tv_1)^4+(tv_1)^2(tv_2)}{2(tv_2)^2}\cdot\frac{1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4v_1^4+t^3v_1^2v_2}{2t^2v_2^2t} = \lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t^3}(tv_1^4+v_1^2v_2)}{\cancel{t^3}\,2v_2^2} = \frac{v_1^2v_2}{2v_2^2}$$

$\hookrightarrow v_2 \neq 0$

Todas las derivadas direccionales de f en el origen para todo vector $v\in\mathbb{R}^2$, con $\|v\|=1$ son $\dfrac{v_1^2v_2}{2v_2^2}$, excepto cuando $v_2=0$, allí no existe la derivada direccional de f en el origen

NO, ALLÍ LA FUNCIÓN SE DEFINE $\neq$ A LO QUE VOS CALCULASTE.

(b) Para que una función sea diferenciable en un punto, deben existir todas las derivadas parciales en el punto [y ser continuas]. La derivada parcial en x, se calcula (*) con el vector $=(1,0)$ $(\|v\|=1)$, y como calculamos en (a), la derivada direccional en el origen con $v_2=0$ no existe. Por lo tanto f no es diferenciable en el origen

(*) como derivada direccional

AE

FALSO.

HOJA 2
TEMA 1

4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $g(t) = (\text{sen}(t), (1+t)e^t)$ diferenciable

~~Defino~~ $(f \circ g)(t) = e^t$

Defino $(f \circ g)(t) = h(t) = e^t$

Como f es diferenciable, vale $\nabla f(x,y) \cdot v = \frac{df}{dv}(x,y)$ (con $\|v\| = 1$)

$v = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ $\|v\| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$

$\nabla f(0,1) \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{df}{dv}(0,1) = \frac{9}{5}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) \cdot \frac{4}{5} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) \cdot 4 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \cdot 3 = 9$

Para averiguar el plano tangente de f en $(0,1)$

Necesito saber $f(0,1)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$

Sé que $h(t) = f(\text{sen}(t), (1+t)e^t) = e^t$

$h(0) = f(\text{sen}(0), (1+0)e^0) = e^0$

$h(0) = \boxed{f(0,1) = 1}$

Como f, g diferenciables $\Rightarrow h$ es diferenciable. ~~Vamos a verificar~~ Por lo tanto vale

SOLO ES ∇ SI $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ SINO ES D

$\nabla h(t) = \nabla f(g(t)) \cdot \nabla g(t)$ $\nabla g(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1e^t + (1+t)e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ (2+t)e^t \end{pmatrix}$

$\nabla h(0) = \nabla f(0,1) \cdot \begin{pmatrix} \cos 0 \\ (2+0)e^0 \end{pmatrix}$ $\nabla h(t) = (e^t)' = e^t$
$\nabla h(0) = e^0 = 1$

$1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)\cdot 4+\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\cdot 3=9$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\cdot 2=1$$

Por comodidad llamo $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=f_x$ y llamo $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=f_y$

$$\begin{cases} 4f_x+3f_y=9 \\ f_x+2f_y=1 \end{cases} \rightarrow \underline{f_x=1-2f_y}$$

$$4(1-2f_y)+3f_y=9$$

$$4-8f_y+3f_y=9$$

$$-5=5f_y$$

$$f_y=-1 \Rightarrow f_x=1-2(-1)=3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=3 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=-1$$

El plano tangente de f en $(0,1)$ se construye:

$$z=f(0,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)(y-1)$$

$$z=1+3(x)-1(y-1)$$

$$z=1+3x-y+1$$

$$\boxed{z=3x-y+2}$$

1) $A=\left\{(-1)^m+\frac{3}{n} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

Separo en dos casos: m impar y m par

m impar: $m=2k-1$ con $k\in\mathbb{N}$

m par: $m=2k$ con $k\in\mathbb{N}$

SIGUE EN LA OTRA HOJA

HOJA 3
TEMA 1

n impar $n: 2k-1$ con $k \in \mathbb{N}$

$$a_n = (-1)^{2k-1} + \frac{3}{n}$$

$$a_n = \frac{((-1)^2)^k}{(-1)^1} + \frac{3}{n}$$

$$a_n = \frac{1^k}{-1} + \frac{3}{n}$$

$$a_n = -1 + \frac{3}{n}$$

Vale $\forall k \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{-n+3}{n}$$

n par $n: 2k$ con $k \in \mathbb{N}$

$$b_n = (-1)^{2k} + \frac{3}{n}$$

$$b_n = ((-1)^2)^k + \frac{3}{n}$$

$$b_n = 1^k + \frac{3}{n}$$

$$b_n = 1 + \frac{3}{n}$$

Vale $\forall k \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{n+3}{n}$$

Supongo que a_n es decreciente

$$a_{n+1} \leq a_n$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{-(n+1)+3}{n+1} \leq \frac{-n+3}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{-n+2}{n+1} \leq \frac{-n+3}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$(-n+2)n \leq (-n+3)(n+1)$$

Vale $\forall n$ porque $n > 0$ $\forall n$ y $n+1 > 0$ $\forall n$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{-n^2}+2n \leq \cancel{-n^2}+2n+3$$

$$\Updownarrow$$

$0 \leq 3 \to$ Vale $\forall n$

$\Rightarrow a_n$ es decreciente $\forall n$

PORQUE VALEN LAS VUELTAS

Supongo que b_n es decreciente

$$b_{n+1} \leq b_n$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{n+4}{n+1} \leq \frac{n+3}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$(n+4)n \leq (n+3)(n+1)$$

Vale $\forall n$ porque $n>0$ $\forall n$ y $n+1>0$ $\forall n$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{n^2}+4n \leq \cancel{n^2}+4n+3$$

$$\Updownarrow$$

$0 \leq 3 \to$ Vale $\forall n$

$\Rightarrow b_n$ es decreciente $\forall n$

Como a_n es decreciente $\forall n$, si $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = L \xRightarrow{\text{Teorema}} a_n$ está acotada inferiormente, y L es el ínfimo de a_n

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-n+3}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}(-1+3/n)}{\cancel{n}} = -1 \to \text{Candidato}$$

¿CANDIDATO? PERO SI ACÁ ME DECÍS QUE ES EL ÍNFIMO !

Si $\exists n$ tq $|a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = L$ (L va a ser -1 por ser el candidato)

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

$$\left|-1+\frac{3}{n}-(-1)\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3}{n}\right| < \varepsilon$$

Vale $\forall n$ porque $n>0$ $\forall n$

$$\frac{3}{n} < \varepsilon$$

(*)

(*) $\frac{3}{n} < \varepsilon$

Vale porque $n>0$ $\forall n$

$\frac{3}{\varepsilon} < n \to$ Vale por Arquímedes

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = -1 \Rightarrow \inf(a_n) = -1$

NO HACE FALTA

Como b_n es decreciente $\forall n$, si $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = L \overset{\text{Teorema}}{\Longrightarrow} b_n$ está acotada inferiormente y L es el ínfimo de b_n

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}(1+3/n)}{\cancel{n}} = 1 \to$ Candidato

Si $\exists n$ tq $|b_n - L| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = L$ (L va a ser 1 por ser el candidato)

IDEM ANTES.

$|b_n - L| < \varepsilon$

$|\cancel{1} + \frac{3}{n} - \cancel{1}| < \varepsilon$

$\left|\frac{3}{n}\right| < \varepsilon$ } Vale $\forall n$ porque $n > 0$ $\forall n$

$\frac{3}{n} < \varepsilon$ } Vale porque $n > 0$ $\forall n$

$\frac{3}{\varepsilon} < n$

$\frac{3}{\varepsilon} < n \to$ Vale por Arquímedes $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = 1 \Rightarrow \inf(b_n) = 1$

Calculo $a_1 = -1 + \frac{3}{1} = 2$ $\quad b_1 = 1 + \frac{3}{1} = 4$

Como a_n es decreciente $\forall n \Rightarrow a_1 \geq a_2 \geq a_3 \dots \geq a_n \Rightarrow a_1$ es cota superior y es la más chica (y como $a_n \neq \emptyset$)

$\Rightarrow a_1$ es el supremo de a_n. $\underline{\sup(a_n) = 2.}$

Como b_n es decreciente $\forall n \Rightarrow b_1 \geq b_2 \geq b_3 \dots \geq b_n \Rightarrow b_1$ es cota superior y es la más chica (y como $b_n \neq \emptyset$)

$\Rightarrow b_1$ es el supremo de b_n. $\underline{\sup(b_n) = 4.}$

Como $\underline{a_n \cap b_n = \emptyset}$ y $a_n \cup b_n = A \Rightarrow \inf(A) = \min\{\inf(a_n), \inf(b_n)\}$

$\Rightarrow \sup(A) = \max\{\sup(a_n), \sup(b_n)\}$

$\Rightarrow \sup(A) = \max\{2, 4\} \Rightarrow \boxed{\sup(A) = 4}$

$\Rightarrow \inf(A) = \min\{-1, 1\} \Rightarrow \boxed{\inf(A) = -1}$

PRIMERO, ESTO NO ES NECESARIO PARA AFIRMAR LO QUE SIGUE. SEGUNDO, ¿CÓMO LO JUSTIFICÁS?