ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS III - 1er Parcial
Fecha examen: 01-OCT-2016 / Fecha notas: a determinar

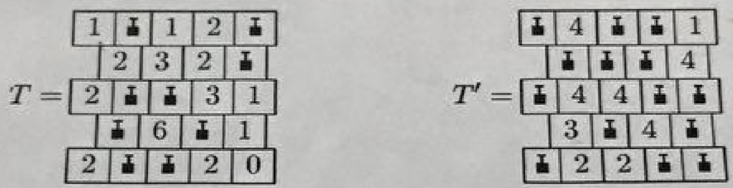
Completar: [redacted]

No completar:

1. Un torneo es una orientación de un grafo completo. Más precisamente, un torneo es un digrafo que se obtiene asignando una dirección a cada eje de un grafo completo no dirigido.

   Demostrar que cualquier torneo tiene a lo sumo un vértice con grado de entrada 0, y a lo sumo un vértice con grado de salida 0.

2. Se tiene un tablero T formado por n casillas, cada una de las cuales contiene o bien una bomba, o bien un número. A partir de T se construye otro tablero T' que tiene sus casillas dispuestas de la misma manera que en T. La diferencia es que cada casilla de T' contiene un número si la correspondiente casilla de T contiene una bomba, y viceversa. Tanto en T como en T', cuando una casilla contiene un número, esa es la cantidad de bombas en las casillas del mismo tablero que son vecinas a la dada. Demostrar mediante grafos que la suma de los números en las casillas de T es igual a la suma de los números en las casillas de T'. En la siguiente figura se muestra un posible par de tableros T y T'.



   SUGERENCIA: Modelar T con un grafo o digrafo G que tiene un vértice por cada casilla del tablero.

3. (a) Sea G un grafo de $n \geq 3$ vértices. Demostrar que todo subgrafo inducido por 3 vértices de G tiene una cantidad par de ejes si y sólo si G no tiene ejes o es bipartito completo. 1.

   (b) Para $n \geq 3$, sea $f(n)$ la cantidad de grafos no isomorfos de n vértices en los que todo subgrafo inducido por 3 vértices tiene una cantidad par de ejes. Por ejemplo, $f(3) = 2$ (los grafos son $3K_1$ y $K_{1,2}$), mientras que $f(4) = 3$ (los grafos son $4K_1$, $K_{1,3}$ y $K_{2,2}$). Hallar una fórmula explícita para $f(n)$. Justificar. 0.

4. Una subcadena de una cadena de caracteres es una porción de la cadena formada por posiciones consecutivas de la misma. Por ejemplo, "`abracadabra`" tiene como subcadenas a "`abra`", "`racad`" y "", pero no a "`arba`" ni "`aa`". Un palíndromo es una cadena de caracteres capicúa, como por ejemplo "`rallar`", "`SMS`", "`@`" y "".

   Sea s una cadena de caracteres de longitud n. Diseñar un algoritmo de complejidad $O(n^2)$ que indique la longitud de la subcadena más larga de s que sea un palíndromo. Por ejemplo, para las cadenas "`SMS`", "`abcd`" y "`wiki`", los resultados deben ser respectivamente 3, 1 y 3. Mostrar que el algoritmo propuesto es correcto y determinar su complejidad (temporal y espacial). Justificar. El mejor algoritmo que conocemos tiene complejidad temporal $O(n)$, aunque es muy complicado.

5. Sea G un grafo conexo de n vértices que tiene k árboles generadores, con $k \in O(1)$.

   (a) Demostrar que G tiene $O(n)$ ejes. 0.7

   (b) Demostrar que si G tiene longitudes no negativas asociadas a sus ejes y está representado mediante listas de adyacentes, entonces es posible calcular los caminos mínimos desde un vértice dado hacia todos los vértices con complejidad $O(n \log n)$. 0.
   SUGERENCIA: Usar el primer punto.

   (c) Demostrar que en el caso extremo en que $k = 1$ el problema del punto anterior puede resolverse con complejidad $O(n)$. 0.7
   SUGERENCIA: No usar el primer punto.

---

[1]Incluyendo a esta hoja. Entregar esta hoja junto al examen.