Parcial de lógica

Lógica y computabilidad

Segundo cuatrimestre de 2014

El examen es a libro abierto y se puede suponer demostrado lo dado en las clases y las soluciones a ejercicios de las guías colocando referencias claras. Entregar cada ejercicio en hojas separadas. En cada hoja debe figurar nombre, apellido y número de orden. El examen consta de 4 ejercicios de igual valor. Cada ejercicio será calificado con A (aprobado), R (regular) o I (insuficiente), ocasionalmente con un signo - (menos). Para aprobar un parcial es necesario tener al menos dos ejercicios calificados con A o A-. Para promocionar es necesario tener al menos tres ejercicios calificados con A o A- en ambos parciales o sus correspondientes recuperatorios.

Ejercicio 1. Sean $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \mathbf{Form}$ conjuntos satisfacibles de fórmulas de la lógica proposicional. Decidir si los siguientes conjuntos necesariamente son satisfacibles o no. Justificar la respuesta.

a. $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$

b. $(\Gamma_1 \cap \mathbf{Con}(\Gamma_2)) \cup \Gamma_2$

c. $(\Gamma_1 \cap \mathbf{Con}(\Gamma_2)) \cup (\mathbf{Con}(\Gamma_1) \cap \Gamma_2)$

Ejercicio 2. Decimos que un conjunto de fórmulas de la lógica proposicional $\Gamma \subseteq \mathbf{Form}$ está cerrado por conjunción cuando para cada par α, β de fórmulas de Γ vale que la fórmula $\alpha \wedge \beta$ también está en Γ. Demostrar que un conjunto de fórmulas cerrado por conjunción es satisfacible si y solo si no contiene ninguna contradicción.

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{L} = \{=, +\}$ un lenguaje con igualdad y una función binaria denotada de forma infija con el símbolo $+$. Demostrar que en la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ con universo $\{2, 3, 4, ...\}$ y que interpreta el $+$ como la suma usual todos los elementos son distinguibles. Es decir, mostrar que existen fórmulas $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x), \ldots$ del lenguaje $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi_i(x)[v]$ si y solo si $v(x) = i$.

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{L} = \{=, f, c\}$ un lenguaje con igualdad, un símbolo de función unaria f y un símbolo de constante c. Demostrar que no es definible la clase de modelos $\mathcal{M}$ en los cuales vale que para todo x existe un n_x tal que

$$\underbrace{f_\mathcal{M}(f_\mathcal{M}(\ldots(f_\mathcal{M}}_{n_x \text{ veces}}(x))\ldots)) = c_\mathcal{M}$$

En decir, mostrar que no existe una sentencia φ del lenguaje $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi$ si y solo si $\mathcal{M}$ tiene la propiedad mencionada.

Historia del ejercicio (no es necesaria para resolverlo): Un famoso problema abierto es la validez de la conjetura de Collatz, que dice que cumple la propiedad mencionada el modelo con los enteros positivos como universo, $c_\mathcal{M} = 1$ y

$$f_\mathcal{M}(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \text{ es par} \\ 3x+1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$