5. EXTREMOS EN VARIAS VARIABLES

Derivadas parciales de orden superior:

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})\ \forall\ 1 \leq i \leq n;\ \forall\ \vec{a} \in A$, quedan definidas las funciones: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\ \forall\ 1 \leq i \leq n$

Si cada una de ellas es diferenciable en A se definen las funciones:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ 1 \leq i, j \leq n$$

Notación: $$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x})$$

Definición:

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

f se dice de clase C^k en $\vec{a} \in A$ si existen y son continuas en $\vec{a}$ TODAS las derivadas parciales de orden menor o igual que k de f.

Proposición:

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R};\ f \in C^2 \implies \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2)\ \forall\ (a_1, a_2) \in A$

Fórmula de Taylor (varias variables):

- De orden 1:
  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2; $\vec{a} \in A$; $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$; $(\vec{a} + \vec{h}) \in A$, entonces:
  - $f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) h_i + R_2(\vec{h}, \vec{a})$
  - $R_2(\vec{h}, \vec{a}) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{c}) h_i h_j$ con $\vec{c} \in L(t) = \vec{a} + t\vec{h}\ (0 \leq t \leq 1)$
  - Además: $\displaystyle\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{R_2(\vec{h}, \vec{a})}{\|\vec{h}\|} = 0$
- De orden 2:
  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^3; $\vec{a} \in A$; $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$; $(\vec{a} + \vec{h}) \in A$, entonces:
  - $f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) h_i h_j + R_3(\vec{h}, \vec{a})$

– $R_3(\vec{h},\vec{a}) = \dfrac{1}{3!}\displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\vec{c}) h_i h_j h_k$

con $\vec{c} \in L(t) = \vec{a} + t\vec{h}$ $(0 \leq t \leq 1)$

– Además: $\displaystyle\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{R_3(\vec{h},\vec{a})}{\|\vec{h}\|^2} = 0$

Máximos y minimos locales, definiciones:
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto; $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

1. $f(\vec{a})$ con $\vec{a} \in A$ se dice máximo local de f si $\exists\ r > 0$ tal que $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})\ \forall\ \vec{x} \in B_r(\vec{a}) \subseteq A$
2. $f(\vec{b})$ con $\vec{b} \in A$ se dice mínimo local de f si $\exists\ r > 0$ tal que $f(\vec{b}) \leq f(\vec{x})\ \forall\ \vec{x} \in B_r(\vec{b}) \subseteq A$

Proposición:
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto; $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, $\vec{a} \in A$, entonces:

$$f(\vec{a}) \text{ es extremo local de } f \Longrightarrow \nabla f(\vec{a}) = 0$$

Definiciones:
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto; $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable

1. $\vec{a} \in A$ se dice punto crítico de f si $\nabla f(\vec{a}) = 0$
2. $\vec{a} \in A$ se dice punto silla de f si $\nabla f(\vec{a}) = 0$ pero $f(\vec{a})$ no es extremo local de f

Hessiano:
Dada $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2, se define el Hessiano de f en el punto $\vec{a} \in A$ como la forma cuadrática:
$Hf(\vec{a}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $Hf(\vec{a})(\vec{h}) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) h_i h_j$ cuya matriz es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2} \end{pmatrix}$$

Si n=2:
$$Hf(a_1,a_2)(h_1,h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2){h_1}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1,a_2)h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2){h_2}^2$$

$$\text{Y su matriz: } \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Definición y proposición:

$H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ forma cuadrática cuya matriz es $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

1. H se dice definida positiva si:

   i) $H(\vec{h}) \geq 0 \ \forall \ \vec{h} \in \mathbb{R}^n$
   ii) $H(\vec{h}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{h} = \vec{0}$

   $\Longleftrightarrow$ (proposición): $a_{11} > 0$; $det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0$; $\cdots$; $det(A) > 0$

2. H se dice definida negativa si:

   i) $H(\vec{h}) \leq 0 \ \forall \ \vec{h} \in \mathbb{R}^n$
   ii) $H(\vec{h}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{h} = \vec{0}$

   $\Longleftrightarrow$ (proposición): $a_{11} < 0$; $det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0$; $\cdots$;

   $(-1)^k \ det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$; $\cdots$; $(-1)^n \ det(A) > 0$

Proposición:

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^3, $\vec{a} \in A$ punto crítco:

1. $Hf(\vec{a})$ es definida positiva $\Longrightarrow f(\vec{a})$ es mínimo local de f
2. $Hf(\vec{a})$ es definida negativa $\Longrightarrow f(\vec{a})$ es máximo local de f

Definición y proposición:

$H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ forma cuadrática cuya matriz es $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

1. H se dice semidefinida positiva si $H(\vec{h}) \geq 0 \ \forall \ \vec{h} \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow$ (proposición):

   $a_{11} \geq 0$; $det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \geq 0$; $\cdots$; $det(A) \geq 0$

2. H se dice semidefinida negativa si $H(\vec{h}) \leq 0 \ \forall \ \vec{h} \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow$ (proposición):

   $a_{11} \leq 0$; $det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \geq 0$; $\cdots$;

   $(-1)^k \ det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \geq 0$; $\cdots$; $(-1)^n \ det(A) \geq 0$

Proposición:
$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^3, $\vec{a} \in A$ punto crítco:

1. $f(\vec{a})$ es mínimo local de $f \Longrightarrow Hf(\vec{a})$ es semidefinida positiva
2. $f(\vec{a})$ es máximo local de $f \Longrightarrow Hf(\vec{a})$ es semidefinida negativa

Punto silla: Proposición 1:
$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; f \in C^3; \vec{a} \in A$ tal que:

i) $\nabla f(\vec{a}) = 0$

ii) $det\Big((Hf(\vec{a}))\Big) < 0$

$\Longrightarrow \vec{a}$ es punto silla de f

Punto silla: Proposición 2:
$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}; f \in C^3; \vec{a} \in A$ tal que:

i) $\nabla f(\vec{a}) = 0$

ii) $\exists\ \vec{\hat{h}} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{\tilde{h}} \in \mathbb{R}^n$ tal que $Hf(\vec{a})(\vec{\hat{h}}) < 0$ y $Hf(\vec{a})(\vec{\tilde{h}}) > 0$

$\Longrightarrow \vec{a}$ es punto silla de f

Multiplicadores de Langrange:
$f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables. Sean $\vec{a} \in A,\ k \in \mathbb{R}$ tales que: $\nabla g(\vec{a}) \neq \vec{0};\ g(\vec{a}) = k;\ S = g^{-1}(k) = \{\vec{x} \in A : g(\vec{x}) = k\} \subset A$, entonces:

$$f(\vec{a}) \text{ es extremo local de } f_{|s} \Longrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } \nabla f(\vec{a}) = \lambda \nabla g(\vec{a})$$
$$(\lambda\text{: multiplicador de Langrange})$$

Además:
Sea λ_0 un posible λ y sea $F : S \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \lambda_0 g(\vec{x})$ entonces:

$$F(\vec{b}) \text{ es máximo (mínimo) local de } F \Longrightarrow f(\vec{b}) \text{ es máximo (mínimo) local de } f_{|s}$$
$$\vec{b} \in A$$

Varias restricciones:
$\Big\{\varphi_i(\vec{x})\Big\}_{i=1}^{k} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R};\ S = \Big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi_1(\vec{x}) = 0,\ \cdots\ ,\ \varphi_k(\vec{x}) = 0\Big\}$;
$\Big\{\nabla\varphi_i(\vec{a})\Big\}_{i=1}^{k}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces:

$$f(\vec{a}) \text{ es extremo local de } f_{|s} \Longrightarrow \exists\ \lambda_1, ..., \lambda_k \text{ tal que } \nabla f(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i(\vec{a})$$